ATTI

DELL'

ACCADEMIA PONTANIANA

VOLUME VI.

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO DEL TRAMATER
1854.

ALLA MAESTÀ

DI

FERDINANDO II.

RE DEL REGNO DELLE DUE SICILIE

etc. etc. etc.

Sire

L'Accademia Pontaniana, col più profondo ed ossequioso rispetto, presenta alla Maestà Vostra il sesto volume de' suoi atti.

Essa spera che gli sguardi di V. M. si volgeranno benigni a' prodotti de' suoi pacifici studii nelle scienze e nelle lettere, de' quali osa offerirle un novello saggio.

La protezione a' cultori del sapere, e la favorevole accoglienza alle loro ricerche è una delle maggiori lodi di un sapiente Sovrano; e la M. V. coll'attestarci in ogni occasione il Suo Reale gradimento, lasciò sempre nell' animo nostro il sentimento della più viva riconoscenza.

Si degni Iddio esaudire i nostri voti sinceri per la costante felicità della M. V. e della Sua Augusta Reale Famiglia, mentre ci soscriviamo colla più rispettosa devozione

Di V. M.

umilissimi e devotissimi sudditi

GLI ACCADEMICI PONTANIANI

NOTIZIA

DE' LAVORI

DELL' ACCADEMIA PONTANIANA

PER L' ANNO 1851

Letta all' accademia dal segretario perpetuo

GIULIO MINERVINI.

Signori Colleghi

L' Accademia Pontaniana nell' anno 1851 si addimostrò non poco zelante ed operosa. Mi torna perciò gradevole ricordar brevemente i lavori, a' quali avete atteso in tutti i varii rami delle umane cognizioni.

I.

1. E per cominciar dalle scienze matematiche, noterò che l' onorevole socio sig. Fortunato Padula presentò alcune *Osservazioni su' punti multipli delle curve algebriche* (1).

Ricorda l'a. che nel 1844 pubblicò, nel n.° 16 del Rendiconto de'lavori della Reale Accademia delle Scienze, un articolo sulla determinazione del numero de' punti doppi che può ammettere una curva algebrica del grado m, e dimostrò non poter esser questo numero maggiore del valore espresso dalla for-

(1) Tornata de' 14 settembre.

mola $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ (1). Questo teorema, come allora fu accennato, fu senza dimostrazione comunicato all'a. dal ch. geometra sig. Steiner. Nello stesso articolo fece pure notare che le equazioni, le quali determinano i punti doppi per una curva espressa dall'equazione $F(x,y)=0$, essendo come è noto $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$, ammesso che queste tre equazioni si accordino, danno un'eliminata del grado $(m-1)^2$, e quindi conchiuse doversi il suo lavoro considerare come destinato soltanto a dimostrare il teorema già trovato da Steiner, ed esser desiderabile che si trovasse il procedimento analitico per giungere ad equazioni che non contengano soluzioni estranee alla quistione di cui si tratta; cioè tali che l'equazione finale non superi il grado $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ (2).

Per quanto è a sua conoscenza, d'allora in poi non è stato ancor pubblicato il lavoro di Steiner intorno alle indicate ricerche; nè a quelle spettanti ai punti di flesso ed alle tangenti doppie, di cui anche parlavasi nel citato fascicolo del Rendiconto. Intanto nell' anno scorso (1850) fu pubblicato ne' *Nuovi Annali di Matematica* compilati da' signori Terquem e Gerono poter essere il numero de' punti doppi di una curva algebrica del grado m uguale ad $(m-1)^2$: risultamento inesatto contenendosi in questa formola $m\frac{(m-1)}{2}$ punti più di quelli che in effetti può la curva data ammettere. Nel fascicolo di marzo ultimo degli stessi annali è stata ripresa la stessa ricerca dal sig. Transon, e con un andamento quasi simile a quello tenuto dall'a. e fondato su gli stessi principii, perviene alla formola esatta.

Nel richiamar questi fatti il sig. Padula dichiara che non intende che il sig. Transon conoscesse il suo lavoro, quantunque non sia perdonabile l'ignorare dopo sette anni un lavoro pubblicato nel Rendiconto di una delle principali Accademie Italiane: *del resto l'errore commesso,* egli dice, *è punizione sufficiente per la non curanza che sembrano mostrare i Francesi per i lavori fatti in Italia. Nè io avrei cercato di parlare di questa priorità, se meditando di nuovo sulle ricerche in quistione non mi fosse riuscito di ripianare il vôto rimasto*

(1) Il fine di questa Memoria, e precisamente la parte corrispondente a' punti doppi, trovasi nel N.° 19.

(2) Nell'introduzione sta accennata una via da seguirsi per ottenere l'equazione di giusto grado; ma essa è troppo lunga e penosa, nè ivi è dimostrato che il suo grado risulti, come dovrebbe essere, non maggiore di $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

nell' altro mio lavoro, e se nella memoria del sig. Transon non avessi scorto che le formole le quali si riferiscono a' punti multipli in generale non sono esatte; il che naturalmente dovea spingermi a vedere in che modo dovevansi modificare.

La formola del sig. Transon, detto m il grado della curva ed y il numero de' punti di moltiplicità μ, è la seguente

$$y \overset{=}{<} \frac{(m-\mu)(2m(\mu-1)-\mu)}{(\mu-1)\mu^2}.$$

Or, come avverte il sig. Padula, se in questa formola facciamo $m=5$ e $\mu=4$ ne risulta $y \overset{=}{<} \frac{13}{24}$; cioè che una curva di 5° grado non può ammettere alcun punto quadruplo, mentre è facile il vedere che ne può ammettere uno. Facendo $m=7$ e $\mu=4$ ne risulta $y \overset{=}{<} \frac{19}{8}$, quindi potrebbe supporsi $y=2$, e ne seguirebbe che una curva di 7° grado potrebbe avere due punti quadrupli, lo che evidentemente è assurdo, poichè la retta condotta per questi punti taglierebbe la curva data, che è di 7° grado, in otto punti. E così per molti altri casi è facile il vedere che la formola è in difetto or in più or in meno. Pertanto l'a. annunzia di aver trovato che quando $\frac{2m}{\mu}$ è un numero intero n, deve essere

$$y \overset{=}{<} \tfrac{1}{2}(n-2)\left(n-\frac{1}{\mu-1}\right)$$

la quale formola corrisponde a quella del sig. Transon. Ma quando $\frac{2m}{\mu}$ è una espressione frazionaria, indicando con m il numero intero prossimamente maggiore di $\frac{2m}{\mu}$ e non minore di 4, si ha in luogo della detta formola

$$y \overset{=}{<} \frac{(n-3)(2m-n)}{2(\mu-1)}.$$

Non lascia intanto l'a. di avvertire che disse nel citato articolo essersi lo Steiner limitato a determinare il numero de' punti doppi, considerando egli un punto triplo come la riunione di tre punti doppi; un punto quadruplo come la riunione di sei punti doppi; ed in generale un punto di moltiplicità μ come la riunione di $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ punti doppi. Quindi potrebbe credersi che dividendo la formola corrispondente a' punti doppi per $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ si avesse la formola pe' punti di

indice μ; ma la conchiusione non sarebbe giusta, e non era al certo questa l'idea di Steiner. Altronde la formola sarebbe $y \overset{=}{<} \frac{(m-1)(m-2)}{\mu(\mu-1)}$ che evidentemente non sempre è esatta. Infatti nel caso di $m=7$ e $\mu=4$ si avrebbe $y \overset{=}{<} \frac{5}{2}$; cioè si cadrebbe nell' assurdo dianzi notato che una curva di 7° grado potrebbe avere due punti quadrupli.

Il sig. Padula accenna poi quale debba essere il calcolo da eseguirsi in generale per determinare le equazioni convenienti per la ricerca de' punti doppi di una curva algebrica del grado m data dall'equazione $F(x,y)=0$. Il risultamento, a cui dice di essere pervenuto, è il seguente: indicando con $\varphi(x)=0$ l'equazione in x che risulta eliminando y dalle equazioni $F(x,y)=0$, $\frac{dF}{dy}=0$, si cerchi il massimo comun divisore tra $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$, e sia questo $\psi(x)$: l'equazione $\psi(x)=0$ avrà per radici le ascisse de'punti doppi, ed il suo grado non potrà esser maggiore di $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$. È chiaro poi che se i due polinomii $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ non hanno comun divisore, l'equazione data non ha punti multipli.

II.

Non pochi lavori relativi alle scienze naturali tennero occupata l'attenzione dell' Accademia.

2. Il cav. Giambattista Quadri comunicò una sua relazione intorno la cura di un complicato male chirurgico, di difficile guarigione (1).

Egli narra che nella mattina del dì 5 maggio corrente anno prestava, in compagnia dell' altro valentissimo nostro collega dott. Semmola, la sua assistenza per la cura di un signore, il quale da dodici anni e più soffriva ritenzioni di urina frequenti e con pericolo di vita, causate da restringimenti dell' uretra. Questo stato anormale avea dato origine a varie fistole urinarie, le quali lo minacciavano nella vita, avendo cagionato una febbre lenta con emaciazione, e determinando di quando in quando febbri ardentissime con sintomi nervosi cerebrali, che sorgevano dalla impossibilità di evacuare le orine, e dalla molestia, e degenerazione di questo liquido per effetto della stagnazione del pus mescolato insieme ad esso entro a' seni fistolosi.

Il cav. Quadri riferisce che dopo aver diligentemente riconosciuto la sensibilità squisitissima dell' infermo, e veduto la poca efficacia di tutte le cure

(1) Tornata de' 29 giugno.

locali e generali tentate da' nostri professori, egli si era persuaso che in questo caso bisognava adoperare o l'etere o il cloroformio, onde potere agire colla energia propria della chirurgia efficace; ed avendo saputo che il dott. Bonnet di Lione ne avea fatto uso moltissime fiate, ed avea guarito persone a lui cognite travagliate dallo stesso malore, lo sollecitò a farlo venire in Napoli: il che di fatti verificossi.

Piacque poi tanto al dott. Semmola ed al Quadri, quanto al prof. Bonnet doversi preferire l'etere al cloroformio, perchè in un gran numero di casi osservati e nella Francia, e nella Inghilterra, e nell'America era stato notato che questo ultimo per causa della sua eccessiva attività su' nervi olfattori, e su' plessi polmonali, da cui partono i nervi del cuore, determina un maggiore abbattimento del sistema nervoso spettante al cuore, ed un più profondo assopimento, con grande abbassamento de' polsi.

Tralasciando la precisa descrizione dell'operato dal sig. Bonnet, il cav. Quadri ci fa sapere che ottenuto l'assopimento dell'infermo, il chirurgo francese metteva allo scoverto tutti i seni fistolosi, e legava undici arterie da lui ferite, e quindi vi passava al di sopra de' ferri con bottoni ben arroventati.

Tutta questa operazione durava per lo spazio di un' ora e cinque minuti, e sempre l'infermo venne tenuto nello stato di assopimento, rimovendosi di tempo in tempo dalla bocca il sacco eterizzante perchè respirasse l'aria atmosferica, e riponendosi quando pareva si risvegliasse, dopo aver versato novello etere nel fondo del sacco su di un fazzoletto di tela. Il prof. Quadri si è assicurato che in tutto il tempo i polsi battevano regolarmente, come in un sonno profondo.

Dopo un' ora l'infermo ritornato in sè stesso disse non aver sentito altro che una lieve pungitura, nè si doleva di tormenti alla parte offesa, ma assicurò che gli era sembrato di esser come trasportato in un viaggio fra mille idee, e visioni confuse, di cui non serbava memoria. Dopo ciò, mercè altri rimedii e cure attentissime, l'infermo è andato di giorno in giorno migliorando, ed al presente trovasi tuttora in via di miglioramento.

Avverte l'autore che questa osservazione, quantunque fosse il primo fatto posto sotto i nostri occhi, vien corroborata da altri consimili citati da molti autori; ed a tal proposito, parlando della utilità della chirurgia efficace, rammenta la sentenza di Curzio Sprengel, il quale encomiando quanto fece M. Aurelio Severino nell'epoca del risorgimento delle arti e delle scienze in Italia, dice: « Quel valente filosofo col suo penetrante ingegno à saputo armare la » mano del chirurgo del ferro e del foco, che sono mezzi potentissimi; e li» berava così l'arte chirurgica da quella malintesa blandizie, per cui molti pe» rivano dopo lunghi patimenti, i quali dopo riattivata questa parte dell'arte » salutare, vennero facilmente guariti ».

Dalle esposte cose il prof. Quadri deduceva tre corollarii, i quali dicea legitimamente derivarsi da' fatti enunciati, ed esser diretti a migliorare lo esercizio della chirurgia in questo regno.

I. Che la eterizzazione devesi adoperare senza tema e colla maggior fiducia, massime allorquando debbonsi praticare operazioni lunghe e dolorose sopra individui sensibili ed estenuati da lunghi patimenti; però bisogna saperne bene usare.

II. Che ne' casi di piaghe cancerose, o di carcinomi, potrebbesi abbandonare l' uso e molto più l' abuso delle polveri arsenicali, e di altri veleni, e sostituirvi la causticazione col fuoco; purchè si faccia precedere la eterizzazione: e così eviterebbonsi tanto i pericoli cagionati dal dolore quanto quelli determinati dall' arsenico e dal cloruro di zinco.

III. Che nel caso di accidentali bruciature, le quali sogliono determinare gravi e pericolose reazioni vitali, convenga eterizzare la persona e di più cauterizzare la superficie del corpo, ossia la cute alterata troppo leggermente dal fuoco, affinchè venga ricoperta da una escara insensibile, ed affinchè l'organo dermoideo venga distrutto da' bottoni di fuoco; nel qual modo la sensibilità elevata di queste parti, non bene abbruciate pel caso fortuito, può determinare reazioni vitali pericolose.

Il prof. Quadri chiude la sua relazione col riportare alcuni casi, ne' quali fu con vantaggio pratticata la eterizzazione o da lui, o dal suo figlio dott. Alessandro: trattandosi di gravi e difficili operazioni di chirurgia, che ottennero l' esito più felice, senza che gl' infermi risentissero alcun dolore nel tempo dell'operazione.

3. L' illustre professore ritornava sul medesimo argomento della eterizzazione con altra sua breve memoria, diretta a fornire talune regole valevoli ad allontanare qualunque spiacevole conseguenza derivar potrebbe dall' uso dell' etere (1).

Comincia l' a. dal dimostrare come sia necessario, che il chirurgo affidi l'eterizzazione ad un medico, mentre egli si accinge ad operare. Sempre più insiste il professor Quadri nel persuadere l' uso dell' etere nelle operazioni dolorose, osservando che non debba il Chirurgo farsi vincere da vano timore, specialmente ne' casi più disperati, ne' quali non gli resterebbe altro che di essere inerte spettatore della rovina e della morte degl' infermi. In conferma di che cita ben diciannove eterizzazioni praticate dal suo figlio dott. Alessandro, senza che alcun pericolo fosse sopravvenuto.

Passando al metodo di pratticar l'eterizzazione, osserva l'a. che questa la-

(1) Tornata de' 27 luglio.

scia dopo di sè un periodo più o meno lungo d' insensibilità: per lo che consiglia di allontanar l'apparecchio dell' etere cinque o sei minuti prima di finir l'operazione. Finalmente, dopo aver notate le precauzioni da prendere per non incorrere in qualche inconveniente, accenna potersi ne' casi disgraziati ricorrere a' medesimi rimedii, che si usano contro l'asfissia.

4. Con la occasione della memoria del cav. Quadri, il socio cav. de Renzi espose alcune osservazioni storiche sulla eterizzazione (1).

Faceva notare il nostro egregio collega, che nel lavoro del cav. Quadri vi erano alcune espressioni, le quali dar potevano per avventura la idea, che fosse nuova per noi la eterizzazione. Egli ha perciò creduto opportuno presentare alcune dilucidazioni sulla parte storica dell' inalamento de' vapori considerato come l' ausiliario della chirurgia, osservando che già questo mezzo adoperavasi in epoca remota nelle nostre regioni, e che lo stesso metodo seguito dal professor Bonnet dee riputarsi italiano, essendo stato la prima volta proposto dal professor Porta di Pavia.

Egli facevasi ad osservare che non solo negli ultimi tempi i chirurgi italiani, e le Accademie tutte, si erano occupate sperimentalmente dell' esame di tali mezzi, aveano modificati i metodi, e temperato quell' eccessivo entusiasmo con osservazioni, che il tempo va sempre più confermando; ma che inoltre la primitiva scoverta del metodo dell' inalamento de' vapori di sostanze anestetiche appartiene all' Italia, non avendovi aggiunto altro i moderni che l' uso di alcune sostanze, che gli antichi non peranco possedevano.

E per vero in Teodorico, chirurgo italiano della metà del secolo XIII, e che vuolsi essere stato anche Vescovo di Bitonto nel nostro Regno, se ne trova la chiara notizia. Riprovando l' uso interno de' narcotici, familiare nella pratica de' chirurgi volgari, ricorrevano gl' Italiani al seguente meccanismo per produrre l' anestesia ed il sonno nelle operazioni chirurgiche. Essi prendevano oppio, sugo di solano, di giusquiamo, di mandragora, di edera arborea, di cicuta e di lattuga, e ne inzuppavano una spugna nuova che facevano seccare al sole. Mentre dovevano operare immergevano questa spugna nell' acqua bollente, e ne facevano respirare i vapori, finchè avveniva il sonno. E questo metodo era tutto italiano, nè lo eseguivano gli stessi chirurgi francesi del secolo XIV, essi stessi discepoli del milanese Lanfranco. Ed invero Guido da Chauliac, descritto questo metodo de' chirurgi d' Italia, non dice *nos facimus*, ma conchiude: *et ipso* (infirmo) *obdormitato faciunt operationem.*

5. Il vantaggio della umanità languente mosse l'altro nostro collega e Se-

(1) Tornata medesima.

gretario aggiunto sig. dott. Gabriele Minervini a presentare (1) la comunicazione di due casi di perniciose intermittenti osservate in Napoli nel mese di Agosto, in un sito poco più elevato de' Miracoli presso la specola astronomica. L'a. offre la storia di entrambi; e chiama l'una perniciosa *algida* accompagnata da grave cefalalgia e da vomito, definisce l'altra per una perniciosa *asmatica* o *dispnoica*.

Noi ci asteniamo dal ripetere la relazione de' due casi, e della cura felicemente eseguitane.

Ma non possiamo mancar dall' avvertire che dall' esame di questi due casi prattici, il sig. Minervini è tratto ad alcune generali considerazioni sulla etiologia del morbo. E pria d'ogni altro nota doversi nella corrente stagione riconoscere in Napoli una particolare influenza, per essersi frequentemente osservate cosiffatte febbri. Questo fatto messo in rapporto con un altro, cioè con la secchezza dell'atmosfera in quell'epoca, come dimostra colle tavole meteorologiche a lui fornite dall' egregio collega sig. del Re, e principalmente colla circostanza del sito asciutto, ov' ebbero luogo le due perniciose da lui osservate, conducono il sig. Minervini ad alcune conclusioni. 1.° Abbiamo, egli dice, altri due fatti i quali confermano la opinione che anche ammessa la esistenza del miasma palustre, non sia questa da stimarsi la cagion sola delle febbri; perciocchè anche le perniciose maligne possono osservarsi ne' siti alti e salubri della nostra capitale. 2.° La umidità facilitando i cangiamenti di temperatura, mal disponendo gli organismi, può esser causa delle febbri, può renderne più facile la propagazione, può aggravarne l'indole; ma non sembra essa condizione necessaria allo sviluppamento delle febbri. 3.° È certo che la mancanza dell' umidità ne' luoghi ove le febbri sono endemiche, le renda più rare, ed anche meno gravi; ma non sembra ammissibile che un'està secca ed asciutta debba necessariamente ed assolutamente risultar sempre salutare pe' luoghi ove le febbri sono endemiche; come sostenevano il Doni, il Puccinotti per Roma, e come il Dorotea ritrovava verificarsi nel Tavoliere di Puglia; perciocchè se avvenissero altre insolite condizioni atmosferiche, pur le febbri potrebbero suscitarsi: abbiamo ragione di ciò sostenere, nell'osservare che in Napoli, ove le febbri di tal genere sono rare e quasi mai endemiche, in questa state che fu secca ed asciutta sufficientemente, pur si offrirono con certa frequenza. 4.° Alcune speciali alterazioni atmosferiche, incalcolabili molte volte, come ben disse i Semmola, par che possano influire nell'originare le febbri. Noi crediamo che quelle osservate in Napoli nella decorsa stagione furono originate dalla coinci-

(1) Tornata de' 28 settembre.

denza del calore col continuo soffiar de' venti variabili. alle fiate anche freschi ed asciutti, i quali favorivano i più gravi istantanei disquilibri del traspirabile.

Conchiude l'autore il suo discorso coll'inculcare a' pratici di essere diligenti nello studiare e nel trattare certe infermità, quando presentano una insolita sindrome fenomenica, spinto a ciò dall'andamento del morbo, che forma oggetto del secondo caso narrato: ed avverte esser uopo che i medici conoscano, e tengano presenti al pensiero, allorchè osservano infermi, certe peculiari influenze, le quali danno origine a dati morbi, che di tratto in tratto stabiliscono la loro dimora in date stagioni, ed in ispeciali località; siccome sembra delle febbri periodiche, che possonsi sviluppare indipendentemente dall'azione miasmatica, e quindi mancare di un'argomento che si tiene come norma usuale per ravvisarle.

6. Da più tempo discorrevasi de' mirabili fenomeni osservati in una infelice giovinetta affetta da volvo catalettico da alcuni mesi nella capitale; e poichè si conobbe che questa inferma era affidata alla medica cura del ch. collega cav. Vulpes, l'Accademia richiese una relazione di quel difficile e complicato malore. Il cav. Vulpes adempì immantinenti all'onorevole incarico, leggendo un ampia relazione con mediche riflessioni (1). E poichè non era ancor terminata la cura di quella infermità, che mostravasi pertanto in via di guarigione, l'a. ne promise altro suo lavoro, quando la inferma avesse riacquistata pienamente la sanità. Noi quindi rimandiamo a tempo più opportuno la notizia di questa interessante comunicazione.

7. La storia della medicina nelle nostre regioni richiamò l'attenzione dell'Accademia con una memoria letta dal cav. Salvatore de Renzi, il quale imprese ad illustrare un importante periodo, ed a chiarire i fatti risguardanti personaggi illustri e di storica celebrità (2).

Espone l'a. alcuni documenti da lui o trovati per la prima volta, o meglio esaminati, da' quali rileva tanto il modo come era ordinata la medicina nel nostro regno nel tredicesimo secolo, quanto la influenza che spiegava la famosa scuola di Salerno sull'insegnamento della medicina e sull'esercizio dell'arte. Questi documenti, per la maggior parte inediti, sono trascritti da' registri degli Atti Angioini, dell'anno 1266 fino al cadere del decimoquarto secolo. Molti medici o conosciuti o mal noti sono così sottratti dall'obblio, e collegandosi i loro nomi co' documenti scientifici che ancora ci avanzano, si chiarisce la letteratura medica di un secolo operoso, nel quale si posero le fondamenta delle principali istituzioni scientifiche de' tempi nostri. La parte precipua di questo lavoro si occupa del famoso Giovanni da Procida, uno de' più importanti

(1) Tornata de' 16 novembre.
(2) Tornata de' 26 gennajo.

personaggi di questo secolo come medico, come scienziato, e come politico. Si mostra, per mezzo di documenti, che Giovanni da Procida nato intorno al 1215 si elevò a gran fama come medico della scuola di Salerno, onde divenuto medico di Federico II ne seppe acquistare la benevolenza in modo che n' ebbe onori e ricchezze, e fu all' imperatore unito come nobile e familiare. Restato essendo presso Manfredi, entrò ne' consigli del re, ed occupò l' elevato grado di Segretario di Stato. Morto questo principe, Giovanni non sapendo mancare alla sua riconoscenza ed alla sua fedeltà verso l' illustre famiglia degli Svevi, seguì le parti di Corradino, onde dopo la sventurata caduta di questo principe, spogliato di onori e ricchezze fuggì dal Regno, si recò in Ispagna presso la figlia di Manfredi, allora regina di Aragona, sostenne con incredibile costanza, astuzia ed ingegno i dritti di questa principessa, ebbe parte principale negli avvenimenti della Sicilia e negli ordinamenti politici di quell' isola, finchè al cader del secolo accompagnando Costanza in Roma, ivi morì nell'esilio, senza mancar mai alla sua fede. Importanti soprattutto sono i documenti, co' quali l' autore intende dimostrare calunniosa e falsa l' opinione di coloro che pretendono avesse Landolfina, moglie di Giovanni, mancato agli obblighi suoi, mentre niun favore ella si ebbe dagli Angioini, i quali mantennero saldi i loro decreti di confisca, anche de' beni dotali di lei. Infine l' autore riporta varii documenti, co' quali prova l' errore di coloro che dicono aver Giovanni, negli ultimi anni di sua vita, riacquistata la grazia di Carlo II, ed i beni; ed aver così rinnegati i principii ed i sentimenti con tanta costanza seguiti in una vita lunga, operosa e piena di avvenimenti. Imperocchè que' documenti dimostrano aver Carlo II dopo la morte di Giovanni, ad intercessione di Papa Bonifacio VIII, e di Giacomo re di Aragona, restituiti i beni a Tommaso da Procida, secondogenito di Giovanni, il quale ebbe un figlio a nome anche Giovanni, che seguì con calore le parti degli Angioini; onde avvenne che coloro che non posero mente al tempo spesso confusero questo Giovanni juniore con l' avo. Questa memoria è stata quindi dall' autore inserita nelle *Addizioni* alla sua *Storia della medicina in Italia.*

8. Il professore Oronzio-Gabriele Costa, che da gran tempo indefessamente lavora ad illustrare la paleontologia del regno, del che i nostri atti presentano lucidissimi documenti, comunicava all' Accademia alcuni cenni intorno alle scoperte fatte nell' anno 1851 (1). A noi sembra inutile riportarne in questo luogo l' estratto; perchè il ch. autore ha già fatto que' cenni di pubblica ragione, in un accreditato giornale scientifico napolitano; ed anche perchè quelle scoperte formano parte di quel magnifico insieme, che siamo intesi a pubblicare ne' volumi de' nostri atti.

(1) Tornata de' 31 agosto.

9. Una scientifica comunicazione diè causa ad un altro lavoro dello stesso professor Costa (1).

Il sig. Federico Lancia di Palermo, cultore della storia naturale e possessore di una svariata raccolta di naturali produzioni, c' inviò un frammento di conchiglia fossile bivalve, rinvenuto nella Sicilia, e bene apponendosi a determinarne il genere, espresse cortesemente il suo desiderio di dedicarlo alla nostra Accademia, denominandolo *Cardium Pontanianum*. Il professor Costa incaricato particolarmente di sottoporre a diligente esame il frammento in quistione, partecipò il risultamento delle sue ricerche, dalle quali veniva confermata la idea dello scopritore, che spettasse il frammento al genere *Cardium*: il che deduceva non solo dalla esteriore apparenza, che viene da' naturalisti appellata *habitus* o *facies*, ma altresì per l' analisi della sua organica struttura, e per essere stato condotto dagli elementi curvilinei a trovar la vera forma della intera conchiglia. In quanto alla specie, l' autore, dopo avere minutamente esaminata la struttura di alcune appendici che ne adornano le numerose coste, si è assicurato ch' essa non ha confronto tralle specie viventi, tranne una innominata e di mari stranieri, esistente nella sua medesima collezione, ove si vede quasi abbozzata.

Un esame accurato fatto dall' a. sul *Cardium multicostatum* del Brocchi, tanto sulla figura, la quale suscita equivoco a primo aspetto, quanto per la descrizione che l' accompagna, gli fanno francamente pronunziare, che il frammento appartenga a quella specie. E conchiude doverglisi perciò religiosamente conservare il nome impostogli dal primo scopritore e descrittore.

Non lascia però l' a. di rendere al sig. Lancia la dovuta lode, per averci col suo pregevole frammento fornita la occasione di chiarire le cose rimaste dubbie dal Brocchi: e lo invita a far novelle ricerche nella speranza che gli riesca di ritrovare una valvola intera, che potesse far meglio studiare questa poco conosciuta bivalve.

III.

10. Nella classe delle scienze morali ho a rammentare un discorso del sig. Michele Baldacchini sullo scetticismo antico (2). Questo fa parte di un più ampio lavoro storico e filosofico, nel quale l' autore si propone di esaminare lo scetticismo *da quando si mostrò la prima volta in Grecia*, *proseguendolo insino a' più recenti dubitatori*. Data prima una idea in generale dello scetticismo, l' autore si ferma all' etimologia della parola, ed esamina, con-

(1) Tornata de' 13 luglio.
(2) Tornata de' 6 aprile.

futandole sempre, le opinioni di Pirrone, di Timone di lui discepolo, di Arcesilao, di Carneade, di Enesidemo, di Agrippa, di Menodoto e di Sesto Empirico. Si esaminano in questa parte, che fu letta all' Accademia, i δέκα τρόποι ἐποχῆς, che furono di poi a cinque ridotti; non che si discute se s' abbia a considerare lo scetticismo qual derivazione legittima della scuola di Socrate, o non piuttosto come una falsa e bugiarda derivazione della buona scuola socratica. E perchè, come avverte l' a., lo scetticismo non può stare senza supporre quella medesima scienza ch' egli combatte, dà in succinto la storia del dommatismo, ed espone in breve la filosofia di Socrate, di Platone, e di Aristotile, ed in che Platone ed Aristotile s' accordino, in che dissentano: discorre finalmente della filosofia degli Stoici, continuatori dello Stagirita, pe' servigi segnatamente da loro renduti alla logica, *alla quale*, dice il sig. Baldacchini, *aggiunsero le indagini grammaticali, instituendo un paragone, diremmo quasi, un parallelismo tra le forme del linguaggio, e le forme del pensiero, continuando in quest' opera Platone ed Aristotile, l' uno de' quali aveva nel Cratilo toccato dell' origine delle parole, e l' altro fatto consistere parte della logica nella interpretazione de' vocaboli* (Vico *De uno universi juris principio et fine uno*).

Ragiona in seguito l' a. della rigidezza della morale stoica, che *menava all' orgoglio individuale, e della rilassatezza della morale degli Epicurei, che poneva nel piacere del corpo l' umana felicità* (Vico, *Lettera all' ab. Esperti* pubblicata dopo la morte di esso Vico), soggiugnendo: *Ma travagliato il pensiero umano da tante e si diverse opinioni, da tanti e sì diversi sistemi, non è maraviglia se ricadesse per qualche tempo di bel nuovo nel dubbio.* Senza entrare in maggiori particolari sul lavoro del sig. Baldacchini, avvertiamo in generale, ch' egli al dommatismo antico annoda l' antico scetticismo, confutandolo sempre; e che di tutti i sistemi antichi e moderni giudica considerandoli dal loro lato morale, ammettendoli in quanto buoni, ed in quanto falsi rigettandoli.

II. Nulla diciamo per ora di un lavoro, di cui il nostro socio sig. Cesare Marini cominciò a dar lettura all' Accademia (1), e che ha per argomento *del dritto divenuto scienza*; giacchè sarà più opportuno darne l' estratto, allorchè ne sarà compiuta la lettura.

(1) Tornata de' 15 giugno.

IV.

12. Passando alla classe di storia e letteratura antica, il sig. conte Trojano Marulli leggeva (1) un discorso intorno una iscrizione pubblicata dal Doni (classe III, n. 67 pag 130), e da altri. In essa leggesi da principio il nome di Costanzo Augusto, e poi la dedica sotto il consolato di Gordiano Augusto, e di M. Acilio Aviola. L'autore giustamente si maraviglia che si trovassero insieme riuniti personaggi, i quali vissero alla distanza di circa un secolo fra loro. Ci fa poi conoscere che avendo su di questa insormontabile difficoltà interrogato due lumi della napolitana epigrafia, il nostro defunto segretario perpetuo comm. Avellino, e l'altro nostro collega sig. ab. Guarini, questi spiegarono la cosa con l'uso non raro nell'antichità di destinare ad altra memoria epigrafica quello stesso marmo, che fu in tempo precedente adoperato per altra iscrizione: ed il primo richiamava ancora a confronto il costume pratticato nelle statue, precisamente imperiali, di toglier loro la testa e sostituirvi quella del dominante imperatore. L'autore con varie ragioni cerca di opporsi alla anddetta spiegazione de' suoi colleghi, e del pari osserva non essere a proposito richiamata l'altra bilingue iscrizione napolitana di M. Cominio Verecondo a lui citata dal Segretario Perpetuo sig. Minervini, come un'altro esempio di queste iscrizioni rescritte: e conclude che la lapida del Doni, nello stato attuale delle nostre cognizioni, debba considerarsi assolutamente inesplicabile.

13. Debbo pure in tal luogo rammentare, o Signori, che il collega de Ritis espose alcune sue idee *sulla vetustissima lingua italiana*, *e sulla formazione de' casi latini* (2).

V.

14. Essendo costume della nostra Accademia di onorar la memoria degli estinti colleghi con funebre elogio da recitarsi dal successore nel posto accademico, fu adempinto questo sacro dovere da' signori Mariano Leopoldo d'Avella, e Paolo Emilio Tulelli. Il primo lesse l'elogio di Michele Cimorelli (3), rapito da qualche anno alle lettere, ch' e' coltivava con indefesso zelo: e poichè il sig. d'Avella richiamava l'attenzione dell'Accademia sul *corso esegetico di belle lettere italiane*, lasciato manoscritto dal Cimorelli, e del

(1) Tornata de' 30 marzo.
(2) Tornata de' 27 luglio.
(3) Tornata de' 23 febbrajo.

quale già prima avea dato ragguaglio l' altro nostro collega sig. Lorenzo Morgigni, fu nominata una commissione composta de' signori cav. Giuseppe di Cesare, conte Trojano Marulli, del nominato sig. Morgigni, e de'signori d' Avella, Francesco Saverio Arabia, e Scipione Volpicella, ad oggetto di esaminare il lavoro del Cimorelli, e farne all' Accademia una più estesa relazione.

15. L' altro elogio recitato dal sig. Tulelli fu quello del benemerito ab. Vito Buonsanto (1), che consacrò la sua lunga esistenza a formare il cuore e la mente della più tenera età. Accompagnarono le voci dell' encomiatore varii poetici componimenti: un capitolo del vicepresidente sig. Giulio Genoino, un' ode del sig. Barone d' Epiro, ed altrettanti sonetti de' signori conte Marulli e parroco Montuori.

16. Nè solo in questa occasione fu l'Accademia sollevata da' più severi studii, col dolce favellar delle Muse: che più volte l'egregio poeta Giuseppe Campagna piacevolmente v' intrattenne, ora trasportato alle più sublimi idee ragionando della *Psiche svenuta* pregiatissimo lavoro del Tenerani (2), ora pronunziando una scherzevole satira, nella quale riprende a dritto una certa perversa maniera di poetare, che venuta d' oltremonti ha trovato in Italia numerosi seguaci (3): il sig. Guanciali recitava un'ode latina su quel tremendo flagello, che colmò la infelice terra di Melfi e tutta la Basilicata di desolazione e di spavento (4): il sig. Francesco Saverio Arabia leggea versi sciolti sopra la storica città di Amalfi, con alcune stanze a Flavio Gioja (5): e la signorina Giannina Milli ispirata da subitaneo fuoco, colla celerità del fulmine, colpì le vostre menti, o Signori, pronunziando estemporanei sonetti, per tacer delle ottave da lei scritte e lette all' Accademia, in occasione della sua nomina a socia onoraria.

Non debbo in questo luogo passar sotto silenzio che l' Accademia volle prontamente pubblicar per le stampe la bella canzone del Campagna sulla Psiche del Tenerani; e che ne furono colla massima sollecitudine distribuiti e diffusi i numerosi esemplari.

17. Due altri lavori pertinenti alla classe delle Belle Lettere e delle Belle Arti furono a voi presentati in quest' anno. Il primo è una memoria del cav. Camillo Guerra, colla quale imprese a disaminare il celebre dipinto del giudizio universale, opera dell'immortal Buonarroti (6). Non mi tratterrò ad esporre

(1) Tornata de' 29 giugno.
(2) Tornata de' 17 agosto.
(3) Tornata medesima.
(4) Tornata de' 28 settembre.
(5) Tornata de' 27 aprile.
(6) Tornata de' 16 novembre.

le idee del nostro egregio collega, perchè sono pubblicate appunto in quel medesimo volume degli atti accademici, a' quali andrà premessa questa nostra breve notizia.

18. L'altro lavoro, a cui accenniamo, è dovuto al sig. Francesco Saverio Arabia, il quale presentò la storica esposizione de' tremuoti di Melfi, facendo alcune osservazioni su quella tanto deplorata catastrofe (1).

VI.

19. Nell' anno 1851 fu proposto al concorso per lo premio di duc. 50 il seguente quesito spettante alle scienze morali ed economiche:

Investigare le cagioni, per le quali non vi sieno, o sieno in decadenza, nella parte del regno delle due Sicilie di qua dal Faro, o in qualche provincia, produzioni naturali, o rami d' industria, che dovrebbero naturalmente prosperarvi; ed indicare se tali cagioni possano rimuoversi e come, senz' alterare il libero processo dell' industria.

VII.

20. Tralle importanti comunicazioni noterò quella del socio prof. Luigi Palmieri (2), il quale annunziava di aver già eseguiti gli sperimenti sulla deviazione del pendolo per dimostrare il moto della terra. Voi accorreste ad osservarli, all' invito dell' illustre collega.

E non molto trascorse che la reale Accademia delle scienze c' inviava impressa una nota dell' altro nostro celebre collega cav. Macedonio Melloni sulle esperienze del Foucault relative appunto alle oscillazioni del pendolo (3).

21. E mi sia pur lecito di ricordare, ad onore del nostro paese, che l'Accademia ebbe in questo anno a congratularsi col nostro valentissimo collega Annibale de Gasparis per la medaglia di oro decretatagli dalla reale società astronomica di Londra: e ch' egli sempre più degno addimostravasi di questa meritata onorificenza, scoprendo un' altro asteroide nella notte del 29 luglio. Le quali scoperte unite a quelle già da lui fatte innanzi, e che dovea pur fare negli anni susseguenti, ne aumentano di giorno in giorno la gloria e la rinomanza.

(1) Tornata de' 14 dicembre.
(2) Tornata de' 27 luglio.
(3) Tornata de' 17 agosto.

VIII.

22. Per ragionar finalmente delle scientifiche corrispondenze, dirò che la illustre Accademia reale delle scienze di Upsal c' inviò in dono dieci volumi de' suoi atti in ricambio de' nostri : e novelle relazioni furono stabilite col principiar d' oggi innanzi l' invio de' nostri atti alla Pontificia Accademia de' Nuovi Lincei di Roma , che cominciò a mandarci i suoi , nonchè alla Reale Accademia de' Georgofili di Firenze, che ci fe parte de' rendiconti delle sue tornate.

IX.

23. La nostra biblioteca fu accresciuta per l'acquisto della continuazione della *Fauna* del sig. Costa , e di alcune opere del ch. Teodoro Mommsen ; non che pe' doni de' signori dott. Giuseppe Bandiera , dott. G. B. Bellini , cav. Vito Capialbi , Ernesto Capocci , Oronzio-Gabriele Costa , Salvatore Fenicia, cav. Giuseppe Folliero de Luna , dott. Gaetano Giorgio Gemmellaro , Garcin de Tassy , cav. Odoardo Gerhard , Agostino Gervasio , Quintino Guanciali , Fed. Gugl. Hope , Federico Lancia , cav. Agatino Longo , Salvatore Mandarini , conte Gennaro Marulli , canonico Masi , dott. Gabriele Minervini , Giov. Domenico Mucci , p. Bernardo da Napoli , Giuseppe de Nobili, Luigi Palmieri , Giuseppe Pansini , cav. Pasquale Panvini , ab. Salvatore Proja , cav. Salvatore de Renzi , ab. Giacomo Rucca , dott. Mariano Semmola , Panfilo Serafini , Agostino Taraschi , Carlo Venturini , Paolo Volpicella , e prof. Andrea Zambelli.

X.

L' Accademia ebbe in questo anno a deplorare la perdita di cinque socii residenti , del cav. Filippo Rizzi , di Domenico Andreotti , di Fedele Amante , del cav. Francesco Ruffa , e del cav. Giambattista Quadri. Io parlerò brevemente di tutti , e solo più specificatamente di coloro, de' quali mi è riuscito raccogliere le notizie biografiche.

24. Il cav. Filippo Rizzi fu cultore delle scienze morali ed economiche, e ne lasciò documenti in alcune sue produzioni.

25. Fu l' Andreotti un gentile alunno delle Muse, e non pochi suoi componimenti recitati in particolari circostanze sono sparsi in varie poetiche raccolte , altri non pochi rimangono tuttora inediti.

26. Fedele Amante vide la luce in Napoli nel 10 aprile 1794. Nella più tenera età fu in Milano affidato alle cure di valenti maestri, che lo introdussero negli studii della matematica e della letteratura: e non sarà inopportuno il rammentare che fra' suoi primi precettori fu l'altro nostro collega già da più anni rapito alle scienze Ferdinando Visconti. Compì l'Amante la sua scientifica educazione nel Liceo di Portanova, nel collegio Borromeo, e finalmente nella celebre università di Pavia, ove fu allievo del famigerato Brunacci, ed ove meritò con moltissimo onore la laurea. Non contento il giovinetto della più esatta istituzione matematica, volle applicarsi a studiar benanche la parte prattica dell' astronomia, di quella scienza sublime che va indagando la profondità de' cieli e l'armonia dell' universo. In questa parte de' suoi studii ebbe a guida l'illustre Oriani.

E tanta era stata la perseveranza del giovine allievo, tanto il suo ingegno capace delle difficili teorie della matematica e dell'astronomia, che uscì dalla scuola già formato un valente professore.

Non è quindi maraviglia, se nel 1815, quando aveva appena trascorso il quarto lustro della sua età, fosse destinato ad insegnare astronomia e geodesia nel reale officio topografico di Napoli, ove era ritornato degno della stima de' suoi concittadini.

Da quell'epoca in poi, o Signori, e principalmente allorchè nel 1827 fu nominato professore di geodesia nel real collegio militare, la modesta esistenza di Fedele Amante si ripartì fra le cure del precettore, e quelle dello scienziato. Ed in queste due categorie noi dobbiamo parimenti considerare le sue produzioni. Fu per lo vantaggio della gioventù studiosa ch' egli diede alle stampe gli elementi di Aritmetica, di Trigonometria e di Geodesia.

Ma si elevò pure non poche volte alle più difficili speculazioni della scienza; e dobbiamo a queste ricerche tre dotte memorie la prima *sulle formole da usarsi per proiettare un angolo all' orizzonte*, la seconda *intorno ad un nuovo metodo di calcolare gli archi terrestri di meridiano e di parallelo*, e finalmente la terza *sulla semplificazione delle formole da adoperarsi nel calcolo delle posizioni geografiche de' punti geodetici*. Dobbiamo a queste ricerche la *memoria intorno al palmo siciliano*, e le *tavole generali d' interpolazione*.

Ne' quali lavori il nostro collega si addimostrò dottissimo nelle scienze matematiche, facendone l' applicazione alle più intralciate questioni dell'astronomia e della geodesia. E non voglio mancar di avvertire che gran parte di queste dotte discussioni furono dall' autore comunicate alla nostra Accademia, alla quale era stato ascritto fin dal 1818, e che veggonsi impresse ne' volumi de' nostri atti. Nè posso egualmente tacere che pur tra noi egli lesse

l' elogio di Francesco Fergola, facendone conoscere i grandi lavori di triangolazione impresi ed eseguiti da quel suo diletto collega, che può ben dirsi martire del suo zelo per l' adempimento de' suoi doveri.

Nel chiudere questi brevi cenni, ricorderemo che l'Amante accoppiava alle cognizioni della scienza da lui particolarmente coltivata, quelle altresì delle buone lettere: per modo che in forbito stile si esercitò benanche a trattare alcuna volta argomenti letterarii. E ne sia una pruova il suo opuscolo *intorno a' pregi del dialetto napolitano*, e la memoria che a questa nostra Accademia presentava, per ridurre alla uniformità il linguaggio scientifico italiano: idea posteriormente accolta e fecondata da molti, e che noi crediamo opportunissima, per non aggiungere alle difficoltà intime della scienza quelle esteriori, provenienti dalla falsa o variabile intelligenza delle parole.

Per compiere la breve narrazione della vita del nostro collega noterò che nel 1849 cessò dall' insegnare nel real collegio militare, e che poco appresso dopo lungo e tormentoso malore a' 17 marzo 1851 discese nella tomba, mentre non ancora compiva cinquantasette anni.

Fedele Amante era stato ascritto come corrispondente a varie Accademie nazionali, tralle quali citerò la reale accademia delle scienze: e nel 1846 fu scelto a formar parte della commissione di Pubblica Istruzione ordinata all'esame degli allievi delle scuole private.

27. Il cav. Francesco Ruffa cessò di vivere il dì 7 luglio di questo anno, mentre non ancora compiva il suo decimo lustro. Egli vide la luce in Tropea città della seconda Calabria Ulteriore, già resa celebre per essere stata la culla di uno de' più insigni filosofi italiani, del Galluppi. Destinato dal padre alla professione della medicina, ch' egli medesimo esercitava, abbandonò questa apollinea facoltà per seguire a tutt'uomo l' altra più lusinghiera ed attraente della poesia. E di fatti non tardò ad ottenere in varii generi meritati applausi. Si esercitò con successo nella tragedia, ed abbiamo a citare fralle sue drammatiche produzioni l' *Achille*, l' *Agave*, il *Codro*, il *Teramene*. Più numerosi, e diremo ancora più pregevoli, sono i lirici componimenti del nostro collega, che già pubblicati si ottennero i suffragii degl' intelligenti. Le sue odi, e principalmente i sonetti, tra' quali citeremo quelli dettati per la perdita acerba della sua diletta consorte, gli accordano un posto onorevole nella patria letteratura. Voi ben rammentate, o Signori, che il Ruffa non di rado faceva udir la sua voce in questa aula sacra alle vostre scientifiche riunioni. Ed io mi contento di richiamarvi al pensiero que' versi, co' quali deplorava la morte del suo illustre concittadino, e nostro collega Pasquale Galluppi. Francesco Ruffa divideva il suo tempo fra le meditazioni del poeta, e le poco

gradevoli occupazioni del giornalista. Io non intendo di considerarlo fra voi in questa diversa categoria, nella quale comunque ammirar si possa il facile stile, e la sveltezza dello scrittore, non potrà mai venirgli quella solida e durevole gloria, che si acquistano le opere del genio, o le ricerche della scienza. Noi saremo paghi di ricordare il nome di Francesco Ruffa, come quello di un valoroso poeta: e non dubitiamo che questo titolo fosse da lui preferito a qualunque altro, perchè da molti preteso, ma sol da pochissimi è meritamente ottenuto.

28. Segue a quella del Ruffa la memoria dello splendido nome del cav. Giambattista Quadri, il quale abbenchè non sia per nascita napolitano, può considerarsi nostro, perchè passò la maggior parte della sua vita ad esercitar fra noi l'arte salutare, e perchè Napoli fu la sua patria di adozione. Il nostro rinomato collega nacque in Vicenza da Domenico Quadri e Teresa Meneghi, nell'anno 1780. La varietà delle cognizioni, da lui con somma perspicacia apparate nella più giovanile età, davano a divedere di quale ingegno fosse dotato, ed a quali grandi cose il chiamasse la capacità della sua mente congiunta ad una perseverante e continua applicazione. Appresi gli studii medici e di scienze naturali nella città di Bologna, ove si meritò la benevolenza dell' illustre Malacarne, cercò di estendere le sue scientifiche cognizioni per mezzo di intelligenti viaggi. Percorse a piedi le più cospicue città d'Italia e la Svizzera, osservando i naturali prodotti di queste regioni, e ritornò in Bologna ricco di osservazioni e d' idee in tutte le branche della vastissima scienza della natura.

Fu allora che quel Governo nominollo *Prosettore di Anatomia*; fu allora ch'egli diè per le stampe una pregevole opera di Ostetricia, e che emulando la gloria dell'immortale Ruyschio, lavorò ad alcuni preparati anatomici, che sono tuttavia di ammirazione nella pubblica raccolta di Bologna.

Ma quello per cui Giambattista Quadri acquistò la maggiore celebrità, fu la oftalmiatria. Deciso di rendersi utile a' suoi simili e principalmente alla sua patria, quando altri si sarebbe contentato di volgari trionfi, corse a Vienna ad apprendere i metodi del Beer, di cui alto suonava la fama; e ritornò persuaso che la oftalmiatria potesse perfezionarsi e progredire al meglio, e ritornò convinto ch'egli aveva sortito dalla Provvidenza questa nobilissima destinazione.

Napoli fu il principale teatro della sua gloria. Egli fu nel 1815 chiamato a fondar fra noi la Clinica di Oftalmiatria nella Regia Università: e non è ignorato da alcuno quanto fosse in tutta l' Europa encomiata ed imitata questa utilissima istituzione, che dal nome stesso del Quadri acquistava maggior lustro e decoro.

L'esercizio più attivo dell'arte non impediva al degno professore di pubblicar memorie ed opere numerosissime, e piene di solida dottrina. Noi siamo persuasi che sol quando alla scienza ed alla teorica si accoppia una prattica luminosa, sia dato di fare notevoli progressi nella medicina e nella chirurgia. Tanto doveva dunque intervenire al nostro collega, che traeva profitto dalla sua prattica per far progredire la scienza, e dalla scienza per immegliare i metodi prattici delle operazioni.

Noi non faremo la enumerazione di tutti gli stromenti da lui modificati o inventati, di tutti i nuovi metodi con successo introdotti: ma non possiamo tacere dell'opera da lui pubblicata col titolo di *annotazioni pratiche sulle malattie degli occhi*, la quale meritò l'onore di essere voltata in non poche lingue straniere, non che delle interessanti osservazioni e memorie, le quali alla medesima parte della chirurgica scienza si riferivano.

Come scrittore il Quadri non si arrestava alla oculistica, ma ragionava sopra svariati soggetti, e pubblici sono i documenti del suo vasto sapere. Inedita rimase un'opera sul cervello, che a giudizio di dotti professori, merita altissima stima.

Questo pellegrino ingegno, quest'uomo tanto utile alla società in cui visse si estinse la sera del 26 settembre 1851, lasciando nel suo egregio figliuolo dottore Alessandro un allievo degno della paterna gloria, un continuatore della sua scuola.

29. Qui dovrei por termine a questa dolorosa parte del mio breve discorso, ma un'altra perdita avvenuta all'Accademia in quest'anno reclama poche altre parole di encomio al nome illustre di un nostro socio onorario, del Marchese Niccola Santangelo. Nè dee far maraviglia una eccezione a riguardo di un personaggio, che per molti anni protesse la nostra Accademia, ed al quale dobbiamo perciò un dovevole tributo di riconoscenza.

Nacque Niccola Santangelo in Napoli il dì 5 gennajo 1786. Il padre di lui Francesco, avvocato e cultore delle lettere, seppe di buon' ora ispirargli l'amore ad ogni sorta di studii, e gli porse quella scientifica educazione che allo svelto ingegno del giovinetto si addiceva. Noi ricordiamo fragli altri istitutori del nostro collega Ignazio Falconieri, Niccola Fergola, Domenico Sarno. Gli studii delle amene lettere, delle lingue antiche e moderne, e delle belle arti nutricarono sin dalla più tenera età la mente di Niccola Santangelo: e tutte queste cognizioni si confermavano, e quasi direi si concretavano alla vista, ed all'esame della scelta e numerosa collezione paterna di pregevoli dipinti, e di ogni sorta di antichità, che doveva raffinare il gusto del Santangelo, e renderlo capace di sentir vivamente il bello ed il sublime delle arti.

Ricco di queste svariate cognizioni, cominciò il giovinetto Niccola a comparir nel foro napolitano, ove per pochi anni ottenne non ordinarii successi.

Ma egli era destinato a percorrere la carriera più luminosa de' pubblici impieghi.

Uditore al Consiglio di Stato nel 1807: Segretario generale della Intendenza di Terra di Lavoro nel 1809: Intendente della provincia di Basilicata nel 1811: Intendente della provincia della prima Calabria ulteriore nel 1816: Magistrato nel 1822: Intendente della provincia di Capitanata nel 1823: e finalmente Ministro degli affari Interni dal 1831 al 1847: si mostrò sempre pari all' altezza degl' impieghi da lui con tanto splendore sostenuti.

Non è mio intendimento esporre tutti i vantaggi portati da Niccola Santangelo alle varie amministrazioni, che furono sotto la sua intelligente e vigilante direzione. Taccio i pubblici edifizii recentemente costruiti o rinnovati, le immense strade novellamente tracciate, il Camposanto di Napoli che qual vera città de' morti sorgeva quasi per incanto a destar la universale ammirazione, il generale archivio del Regno in nobile forma ridotto, la illuminazione a gas, i primi ponti a catene di ferro, la prima strada ferrata costruita in Italia.

In un' Accademia, ove la umana enciclopedia si coltiva, a me piace di additare Niccola Santangelo come un caldo promotore della coltura del regno, e de' civili progressi della nazione.

Nè si creda che io scompagni la gloria del Ministro da quella dell' Augusto Sovrano, a cui sono affidati i destini delle Sicilie. Le grandi imprese, le opere magnifiche, le utili e nobili istituzioni dipendono ad un tempo dalla magnanimità e dalla sapienza del Principe, e dall' intelligente ed animato concorso de' consiglieri della corona.

Questi sono i due cardini, su' quali è poggiata la felicità e la crescente civiltà di un reame. L' encomio meritato dal Ministro, lungi dal diminuire il vanto del Sovrano, ne pone in massima luce la splendida gloria: perchè le grandi opere immaginate o promosse da' consiglieri della corona, appartengono di fatti alla storia di quel principe, sotto del quale furono effettuate.

Le scuole elementari sono la più necessaria istituzione per dileguare la pubblica ignoranza, e per render comune quelle primarie nozioni che ingentiliscono insensibilmente i popoli, e ne migliorano finanche i costumi. Sotto il Ministero di Niccola Santangelo fu provveduto che verun comune del regno mancasse di scuole elementari.

A beneficio della nostra marina mercantile, scuole nautiche furono stabilite in Procida, in Castellammare, in Catania.

E per parlare della più alta istruzione; le Università ed i Licei furono arricchite di novelle cattedre: una Università venne fondata in Messina: la stessa

Regia Università di Napoli acquistò novello splendore per varii gabinetti in essa ordinati ed accresciuti ; tali sono quelli di fisica , di anatomia patologica, e di zoologia.

Nè furono trasandate le Belle Arti, che un alunnato fu creato in Roma pei sudditi Siciliani , ed aumentato fu ancor quello già esistente pe' Napolitani.

L'ordinamento dell' archivio fu di non lieve vantaggio per le ricerche della nostra storia , essendosi in quell'importante stabilimento raccolte immense pergamene da tutte le parti del regno.

Non poche pubbliche biblioteche furono aperte nelle provincie ; ed una ne fu benanche formata nel ministero degli affari interni.

E per le ricerche più alte della fisica e della elettricità fu edificato sulle vette dell' ignivomo Vesuvio un osservatorio meteorologico, e fu per questo tracciata una comoda strada , che quando fosse compiuta , contrastar dovea colle opere della romana grandezza.

Nè di minor conto dee riputarsi la istituzione degli *annali civili* , giornale destinato a segnare i progressi intellettuali, industriali, e commerciali del paese: repertorio della storia civile contemporanea del reame delle Sicilie.

Comprendendo ne' più vasti limiti la dignità delle scienze , e la superiorità dell'ingegno , Niccola Santangelo rispettava i dotti , e mostrava tutta la sua venerazione per la sacra scintilla del genio.

Possessore di una quasi regia raccolta di oggetti di belle arti e di antichità , aveva concepita quella viva passione del bello , di cui vedeva presso di se ad ogn' istante i modelli : questa illuminata passione ne accendeva il cuore alla vista di un vago dipinto, di una bella statua ; all' udire di una pregevole poesia; alla idea di qualunque nobile parto dell' umano intelletto.

Questo sentimento , o Signori , rende gli uomini di stato protettori e promotori della civiltà di un paese. Questi animi privilegiati volgono alle città i loro sguardi , e non sono contenti se non le scorgono ornate di leggiadri edifizii , di ben dirette strade , e di utili stabilimenti : volgono alle arti il loro pensiero , e non son paghi se non veggono i prodotti del genio fregiare i pubblici musei , le pubbliche fabbriche , i pubblici monumenti : si fermano a considerare la nobiltà delle scienze , e trovano tantosto diletto a proteggere ed animare la pubblica istruzione , le Accademie , le produzioni e le ricerche de' dotti.

Essi son destinati a dar moto al pensiero , ad eccitare i più tardi intelletti, a ridurli ad operare quello , di che essi stessi non si credeano capaci.

Noi non dubitiamo che a questa classe privilegiata appartenne Niccola Santangelo.

E ben fu questo il parere di tutti quei dotti che convennero in Milano nel 1844 al congresso degli scienziati italiani.

Fu allora il cav. Santangelo proclamato Presidente generale del settimo congresso. L'accoglimento da lui fatto nell'anno seguente a que' dotti italiani o stranieri, che si riunirono in Napoli, mostrò che l'universale suffragio di quegli eletti ingegni non erasi punto ingannato. Ed i pregevoli discorsi, ch'egli pronunziò all'aprirsi ed al chiudersi del congresso, furono giudicati degnissimi di quella solenne occasione.

Colmo di onorificenze dal proprio Sovrano, e da' principi stranieri; ascritto alle principali Accademie d'Europa; ritornava nel 1847 il Marchese Santangelo al modesto ritiro della vita privata.

Ne' pochi anni che gli rimasero furono sua compagnia le delizie della famiglia, della rispettabile moglie Carolina Castrioto di Scanderbeg la quale sin dal 1823 abbelliva i suoi giorni colle sue virtù: furono suo diletto e sollievo i classici monumenti da' quali veniva circondato; gli ameni studii della bella letteratura, ne' quali frequentemente si esercitava. E voi ben ricordate, illustri colleghi, come alla morte del Commendatore Avellino, già vostro benemerito segretario, Niccola Santangelo dettò nel seno di quest'Accademia eleganti poesie in latino ed in italiano a compianto dello spento amico. Voi pubblicaste questi poetici componimenti, che sono un valido testimonio della sua mente e del suo cuore.

Ahi! che poco dovea sopravvivere all'uomo, di cui deplorava la perdita; che a' 28 novembre del seguente anno 1851, cessò le tempeste della vita nella pace del sepolcro.

Ma non cessò la sua gloria: questa dura tuttora nei pubblici monumenti, nelle pubbliche istituzioni del nostro paese: e non si cancellerà per lo correr de' secoli dalla memoria della più tarda posterità.

ATTI

DELL'ACCADEMIA PONTANIANA

FASCICOLO I DEL VOLUME VI

AVVISO

L'accademia Pontaniana pubblica i suoi atti in fascicoli, affinchè possano sollecitamente conoscersi le memorie a misura che sono approvate.

Ogni fascicolo si pubblica subito che si ha sufficiente materiale e senza astringersi ad alcun determinato periodo o numero di fogli.

Terminati i fascicoli che debbono comporre un volume, si dà il frontespizio, la dedica, la storia de' lavori, ed il catalogo degli accademici da premettersi al volume medesimo.

NAPOLI
DA' TORCHI DEL TRAMATER
1850

DELL' USO E DELL' ABUSO
DELLA SIMILITUDINE
NELL' ELOCUZIONE DIDATTICA

MEMORIA

letta all' Accademia nella tornata degli 11 Dicembre 1831

DAL SOCIO RESIDENTE

Giorgio Masdea

. . . . . *Vanae lusus imagine formae.*
Ovid. Metamorph.

La Similitudine, che, siccome *tropo* dell' elocuzione, hassi a distinguere dalla Somiglianza, la quale costituisce un fatto naturale, o razionale, è d' un uso comunissimo in tutte le categorie del Linguaggio. Io quì parlo dell' uso della Similitudine soltanto; perchè la sua maravigliosa genesi od indole, anzichè alle forme del dire, alla facoltà stessa più caratteristica della vita dell'Uomo appartiene (all' *Imitazione* dir voglio), onde ora sarebbe ridondanza d' argomento intrattenermi a dissertare.

E ben puote ognuno, il quale abbia cercato di proposito rendersi conto de' pensieri proprj o degli altrui, meditando o scrivendo, essersi accorto della varia influen-

za prepotentissima del Linguaggio sulla Ragione umana; nè solo per ciò che concerne all'efficacia o de' meri segni sopra le idee, o vicendevolmente delle idee sovra i segni, che le riferiscono (ricerche utili e profonde, per cui tanto ha meritato finoggi dal retto e vero sapere la filosofia analitica de' seguaci di Condillac, e di Locke); ma per ciò eziandio, che ha riguardo alle stesse cardinali, o più ovvie maniere del discorrere · mentre da una banda (com'è osservato, quantunque di passaggio (1), dal sommo da Verulamio) i dotti prevenuti in favore d' una scienza, ch'essi per avventura meglio posseggono, ne riversano in tutte le loro lucubrazioni una certa tinta, la quale traveste ed altera la natura delle cose, per la loro enunciazione non più ingenua; e dall' altra ben sovente accade, che tal'espressione, con tradurre in una foggia rappresentativa i conati più ardui dell' Intelligenza, faciliti sibbene gli officj per se troppo duri di questa nostra possa trascendentale, ma indi anche nè di raro scorgesi, che l'apprensione vada sostituita alla verità, il pregiudizio alla conoscenza, e 'l fantasima dell' analogìa alla realtà d'un principio. Io non so quanto altri abbia fino ad ora volta la sua attenzione a questo difettoso, ma radicale temperamento del senso umano: con tutto ciò parecchi, ed importantissimi obbietti di ricerche puot' esso fornire; tra' quali, siccome più adattati a un saggio Accademico, ora siami lecito esporre solo pochi avvertimenti, ben per tempo da me raccolti, *sull' uso e sull' abuso della Similitudine nell' elocuzione didattica.*

(1) *De Augmentis Scientiarum.*

La Similitudine, a diciferarne l' indole, è una specie di sinonimia (bugiarda, e superficiale per lo più) di cose; del pari che la Sinonimia, propriamente detta, è una specie di similitudine d' idee: con tale notabile differenza però, che la similitudine di due idee, atteso la diversità de' due vocaboli che le improntano, per una necessaria maniera di essere del nostro spirito, tende sempre a dispararsi; mentre la sinonimia di due cose, le quali si offrano all' immaginazione sotto una forma simile, tende, per la stessa nostra necessaria maniera di essere, a identificarne sempre più le idee, in origine e in fondo diversissime. Insisto su di ciò, perchè tutta la scienza a cui gli uomini possono aspirare, tutta la felicità della quale siam noi capaci, risulta meno dalla natura intima ed essenzial delle cose, che dalle vere e genuine idee, le quai di esse ci è dato apprendere, e da' rapporti, che indi le associano a' bisogni di tutta la nostra vita. Innumerabili e grandiose adunque son le modificazioni, che la Similitudine proccura al nostro giudizio; quantunque non sempre, o piuttosto non mai con giusto e fino criterio rilevate: diuturne spesso, talvolta fuggevoli; ora brusche e determinate, ma più sovente lievi confuse ed ambigue. — Così definita logicamente la Similitudine, m'è poscia facile discernerla in *Allegorìa*, la quale può dirsi (riguardo alla sua influenza sulla nostra ragione) una specie d'induzione figurativa; in *Sincrisi*, che per lo stesso titolo merita appellarsi una specie d' induzione comparativa; e finalmente in *Parabola*, la quale io denominerò una specie d' induzione esemplificativa. Per ora mi limito a queste principalissime differenze della Similitudine, giacchè a rigore la

Metafora potrebbe anch' essa annoverarvisi, siccome un'altra specie: infatti questo bel tropo accomuna in un significato, e connette quindi per un'analogìa intuitiva due idee fra loro aliene, assai più che distinte. Ma quì bisogna riflettere, che la Metafora è una legge ed una norma, anzi che un arbitrio ed una preferenza del nostro spirito, obbligato a palesare le più recondite sue nozioni con parole comprensibili, cioè, idonee a chiarire materializzando in certa guisa ogni nostro interno concetto. E che diverrebbero le Scienze più esatte, o la Metafisica più critica, dove il loro vocabolario si volesse correggere, e mondare affatto di tutte le trasmigrazioni metaforiche?

D'altronde puote a bell' agio osservarsi, quanto vastamente e sovranamente la Similitudine domini, diriga, e stabilisca le opinioni d' ogni Popolo; introducendosi nelle sue azioni più abituali, e marcando col proprio conio la di lui stessa maniera di sentire. Gli auspicj in Occidente, i simboli in Egitto, le allusioni grafiche od estetiche in Oriente (a cui gran parte si confidò delle antiche religioni, e della primitiva morale degli Uomini) sono infatti ripieghi variatissimi della Similitudine: onde puote in generale pruovarsi l'immemorabile sua influenza sull' andamento, e sul carattere delle nazioni. E non dee Atene alla scuola delle Similitudini (alla voga del Teatro drammatico) lo sviluppo massimo della sua civilità? Roma forse non riconosce dal tiro d' eloquenza d' Agrippa (che un pretto argomento fu di Similitudine) la sua consistenza, e la sua grandezza?... Intanto io non debbo qui, se non accennar cotali maraviglie nella storia del nostro spirito, molte altre, e più ardue negligendone; perchè io mi son proposto

di far soltanto ravvisare nella narrazione didattica, per ciò almeno che a me sembra, il buono od il cattivo impiego delle similitudini. Eccone taluni esempj: ne potrei addurre uno sterminato numero.

La Medicina, la scienza più onnossia a' prestigj de' sistemi, fu lungo tempo, ed è in parte ancora, la dialettica della Similitudine (1). Bothall in capo dello scorso secolo generalmente accreditò la micidiale pratica de' salassi *ad cautelam*, inferendo da un semplice paragone, prima da lui instituito, tra il cuore e un pozzo: mentre, se l'acqua tanto più limpida e fresca diviene (ei soggiungea) quante più fiate il pozzo si netta; chi negherà del pari, come tanto più debba ripurgarsi, quanto ei sia più volte rinnovato e *ventilato* il sangue? — L'assurda dottrina di Brown, e di tutt'i suoi seguaci, sull'indole iperstenica dell' *Infiammazione*, dove ben altri rimonti al primo anello di tutti i loro lemmi, si troverà fondata sovra un arzigogolo ipotetico di Similitudine: perchè (hanno essi affermato) se l'azione e la reazione nella dinamica de' corpi si equivalgono, e sono contrarie; fia giusto in conseguenza ed indispensabile eziandio considerare ogni *Processo flogistico*, siccome una serie ordinata di avvenimenti oppositi all'efficienze esterne irritative. E quindi anche la Dottrina

(1) Lo stesso Lucrezio avvertì, come la prima dottrinal nozione, cui ebbero i Greci intorno alla vita (l'*Armonia*, od un tal *abito vitale*) era stata l'imprestito d'una Similitudine. Ma non lo è meno la seconda, l'*Economia* dir voglio . . . .

Quapropter . . . . redde Harmoniaï
Nomen ad organicos saltu' delatum Heliconis;
Sive aliunde ipsei (sapientes) *porro traxere*, *et in illam* (vitam)
Transtulerunt; *proprio quae tum res nomine egebat*:

Lib. III. 131.

compensatrice degli *stimoli* pe' *controstimoli* — Nè diverso è il linguaggio polemico di tutte le Scuole o più antiche, o più moderne, poichè tutte sorreggonsi in compendio sovra una supposizione d'identità, ovvero quas'identità di fenomeni tra' corpi bruti e gli animati; e tutte si ricusano egualmente all'esame introspettivo de' fatti, su' quali potrebbe soltanto con qualche legittimità costruirsi una ragionevole teorìa (1), mentr' esse snaturano i fatti medesimi — Per finirla colla Medicina ricorderò qui ciò che molti sanno, vale a dire, che Hanhemann e i suoi partigiani, fra le tante altre loro singolarità, divergono estremamente anche nel loro medico empirismo dall'ermeneutica universale de' medici di ogni tempo, e fino di ogni luogo; laddove pretendon essi di sperimentare la virtù specifica de' propj rimedj sull'uomo sano, piuttosto che sul malato. Or si sospetterebbe mai l'ostinarsi loro in cotanto abbaglio un'insinuazione di certa Similitudine? . . E nondimeno lo attestano le precise parole, che quì desumerò da un comentatore, per altro erudito e perspicace, di cosiffatta opinione » E se il valore » e forza d'un atleta conoscer pure, o misurarsi deve; di » ciò conoscenza e misura aver mai pretenderemo, se l'at- » leta al pugilato invitiamo con un debole ed accagionato » nella salute? No: il più vigoroso uomo deve scendere » con l'atleta sull'arena, al paragon della possa. Nè al- » trimenti, onde il valor vero e reale delle medicinali so- » stanze si conosca, queste sperimentar dobbiamo negli » uomini sani e robusti ». Sosterrà ben altri, nol nego,

(1) Vedi la mia Memoria sulle *Condizioni vitali del Dolore*, inserita nel Volume III degli Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli.

essere solamente lussuosa e rettorica una cotale induzione (quantunque principalissima per gli Hanhemaniani) perchè sola non manoduce a veruna conseguenza. Ma chi ha per tempo guardato, e con fredda investigazione, alle molle ed alle pendenze dello spirito umano; converrà meco non pertanto, che il sofisma e l' errore ci sono assai più appetitosi e lusinghevoli, dell' argomento semplice, o della verità, la quale fora uopo svolgere con metodo lungo e imparziale: onde fuori dubbio egli ci occorre, anzi che di favorire, di ostare alla nativa nostra intellettuale infingardaggine, per cui siam' ognora propensissimi ad accogliere, e fino a prendere da noi medesimi le colorate amplificazioni d' un pensiero, siccome reali o schiette pruove di un ragionamento; e tanto più, quanto lo stesso ragionamento fia più astruso e malagevole.

Trapasso ad altri esempj, che tolgo dalla storia dell' Ideologìa, e della Morale — Due o tre anni fa uno scrittore celebre, ne' suoi disputamenti robusto, e di felice acribia dotato, consegnò (come un abbozzo di Filosofia novella) a' quaderni di un vulgatissimo Giornale letterario e scientifico alcuni suoi tentativi d' estimazione tra le verità che i sensi, e quelle che il puro giudizio a noi somministrano. Ora, in leggerli, i di lui teoremi sono torniti colla più matura diligenza; le di lui ricerche concludono fino a certo punto, e riescon sempre gravi. Inoltre ci par che il nostro autore ami d' intrattenersi colle più serie difficoltà; ci par, dico, che incontri di buona voglia ogni ostacolo, e che l' incertezza e l' indefinito soccorrano alle sue meditazioni. Ma dove si ponga mente all' esordio di questo per altro lodevolissimo, non meno che originale e cu-

rioso abbozzo di filosofia ecclettica, ne accorgeremo, che il Sig. Bonstetten è partito da una Similitudine, dalla cui fascinazione non ha saputo emanciparsi affatto più, in tutto l'andamento delle sue contese — *L'ideologìa empirica*, egli asserisce, *è come l'oceano Pacifico: vi si naviga sopra con un corso sempre tranquillo: l'orizzonte ne trasparisce da ogni lato. Ma lo scandaglio è quas' in esso impossibile; ma l'ancora non vi tocca fondo. La pura ideologìa, al contrario, a voi si appresenta siccome un golfo pien di ghiaja, limaccioso: ma il lido è prossimo, ed il porto è sicuro* — E qui vienmi destro di aggiungere, a più precisa dimostrazione dell'assunto di questa Memoria, uno squarcio dal sig. D'Ancillon, membro dell'Accademia R. di Berlino, autore insigne di parecchi Trattati filosofici; in uno de' quali egli ha intrapreso ultimamente a discutere *la realtà delle Verità prime*, cioè *la teorìa dell'Esistenze*, col titolo qui appresso -- *Saggio intorno alla scienza, ed alla fede filosofica* -- Il Sig. D'Ancillon rigetta dunque la materiale ideologìa delle apparenze, ossia delle mere sensazioni, che accetta è alla più parte degli uomini siccome un fondamento di realtà; e ricusa non meno l'astratta metafisica delle nozioni pure de' mistici di Alemagna, da lui tenuta per architettamento ingegnoso d'esistenze immaginarie e gratuite. « La radice » d'ogni realtà (quindi egli afferma) o la base di tutte » l'esistenze, dessa è la *Ragione;* da cui partono tutt' i » ragionamenti, e su cui soltanto possono riposarsi . . . » La Ragione, della quale parliamo (continua il dotto ac- » cademico) non è uno strumento, nè un organo, che » serve a certe operazioni dell'anima; ma una forza pro-

» duttrice, un poter creatore, il quale ben ha le sue parti-
» colari rivelazioni, il quale non mica indovina ciò che esi-
» ste; ma che ha l'*intuizione* (si ponga mente, di grazia,
» alla frascologìa dell' autore!) dell' esistenze, e le vede
» sollevarsi dal proprio suo seno . . . Nè si contenta già
» di combinare ciò che a lui è accordato, e di dedurne
» le conseguenze; ma somministra la realtà medesima .....
» Cosiffatta Ragione, l'*occhio interno* (ecco il motto
» analogico!) che riceve la luce d' una maniera immedia-
» ta, appercepisce l'esistenze; del pari che l'occhio del
» corpo fissa i colori, e i contorni del mondo sensibile.
» Egli è desso una specie di senso (altro sinonimo della
» capital Similitudine!) d' un ordine superiore, il qual
» senza intermedio contempla il mondo invisibile. Cotal
» Ragione è l'origine, e la base d' ogni scienza; poichè
» la Scienza non può avere altr' obbietto, se non l' esi-
» stenza e la realtà ». E così prosegue in tutto il libro
succennato a discorrere il Sig. D' Ancillon; non sospettando
egli, al certo, di tradurre e parodiare a ogni linea le opera-
zioni e i fenomeni della vita più comune e materiale, ab-
benchè in estasi d' intendere funzioni solo, e prerogative
ineffabili dell' Intelligenza nostra. E che questa vaga de-
clinazione immensa della filosofia mistica dalla genuina
filosofia logica (da me quà riferita, siccom' esempio me-
morando dell' uso riprovevole della Similitudine nel ser-
monar didattico) si abbia infatti a segnalare pel verso
medesimo, e nel riflesso incantevole della medesima im-
magine corporea, o piuttosto dell' induzion comparati-
va sopr' additata; si potrà ottimamente riconoscere dietro
una specie di comentario, cui della Dottrina dell' im-

mortale Kant ha fatto qualcuno de' Sigg. Compilatori della reputatissima *Rivista d' Edimburgo*, in un brano inscritto fra' suoi quaderni, non guari egli è. « Kant (ivi dicesi)
» penetra per una sorta d'*intuizione* in ciò, che la na-
» tura dell' uomo ha di più profondo, e di più puro....
» L' obbietto principale dell' alta di lui filosofia, che di-
» sdegna di cominciare dalle apparenze esterne, per fru-
» gar indi ciò che in noi si passa... che nega trovarsi il
» fondamento necessario della verità nell' esperienza, nella
» testimonianza de' sensi, e nella generale persuasione degli
» uomini, secondo Locke e Reid; l' obbietto consiste in
» preparare l' *occhio* interno (espressione tecnica!) a scor-
» gere il Vero primitivo, necessario, assoluto, eterno: e
» quindi ei studiasi a dissipare quelle ingannevoli rappre-
» sentazioni de' sensi, ch' ecclissano la verità prima den-
» tro di noi, in modo che noi potessimo distinguerla po-
» scia realmente, ed accettarla, siccome il sostegno e l'es-
» senza d' ogni altra verità . . . » (1).

E fin quà non ho mentovato, se non controversie di

(1) Ed anche il nostro Vico, fin dal 1719, stabiliva — *Omnis divinae atque humanae eruditionis* . . . oculus Ratio — Ma è questo il luogo di ricordare, che i Kantisti si fanno uno scrupolo a discernere dalla Ragione l' Intelligenza. Gli obbietti, su' quali esercitiamo tal' ultima nostra facultà, sono le conoscenze reali, e pratiche; come le Matematiche, le Fisiche, l'Economiche, le Politiche, ec. laddove la Ragione ci serve a discuoprir l'assoluto, il primitivo Vero, il Bello eterno (anche scevro delle lusinghe di ogn' immagine, non che di ogni espressione), la Virtù scompagnata dall' Utilità, etc. D'altronde io son pago quì di accennare, nè già ho voluto esporre tutt' i torti della dialettica delle similitudini verso la Psicosofia. — Ho citato forse Laromiguière, il quale non adduce altra differenza tra le nostre idee, e le nostre facultà, se non quella che passa tra il mugnajo, e 'l frumento, cui esso fa macinare? . . . Ho trascritto forse le parole di Cicerone, laddove questi pruova l'essenza dell' anima coll' esempio d' un uomo, il quale chiuso entro camera oscura, meno che per un buco (il Senso), credesse poi questo buco necessario alla visione? ... etc. etc. etc.

sapere, o innocenti dissensioni di scuola: ma potrei rivangare, senza doglia e onta, o pur senza dispetto, la ben vecchia storia di tutte le contestazioni guerresche de' secoli XVII e XVIII, o le crudeli vicende, a tutti note, delle animosità e dissensioni diplomatiche d' Europa, nello stesso intervallo di tempo; a fin di posare e ribadire i suoi diversi governi in un gran sistema di mutuo, e generale *Equilibrio* di forze? E quante altre vessazioni, quante perdite, quanti massacri non son costate a' popoli finora le due tesi dottrinarie di una *Bilancia* di commercio, e d'un *Antagonismo* di poteri; Similitudini prese amendue dalla meccanica de' corpi inerti sconnessi, o costruiti fra loro, e trasfuse e appropriate a tutte le civili scienze, che avrebbero dovuto non aver mai in prospettiva, se non la simmetrìa delle nostre facultà politiche, o l' euritmia delle morali!... — Ma si oppone per avventura, che io smisuratamente attribuisco all' influenza della Similitudine: e io risponderò pregando ognuno a ben considerare l' impero, cui l' immaginazione esercita, e 'l dispotismo, cui sovente usurpa, su tutte le attitudini dell' intendimento umano. Avvegnacchè insomma la frase e 'l modo non comunicano, se non coll' immaginazione e col senso; e 'l senso e l' immaginazione ne fanno soltanto avvertito lo Spirito. Nè lo spirito medesimo unqua può esternare i suoi più astratti concepimenti, se non modificati in qualunque guisa dalle due anzidette radicali, e prime attribuzioni dell' Uomo: e questa legge è fatale per la di lui esistenza, o piuttosto provvidenziale rispetto alla di lui sociabilità.

Qualche valente Scrittore, dopo ciò, si accinga, se vuole, a passare in rassegna cronologica tutt' i piati, tutte

le pretensioni, od eziandio tutt'i trasversamenti, che il libero traffico della Similitudine, non solo dalle scienze speculative alle positive, ma da una scienza pure ad una scienza affine, e da un articolo a qualche altro della scienza stessa, ha importato finoggi, e costerà mai sempre all' umano sapere: mentre la Similitudine si è rannicchiata perfino nella nomenclatura degli oggetti naturali o sociali, più curiosi o men conti. E (per es.) quanti pensieri futili, benchè sorprendenti, ha vie via suscitato la parola *Midolla*, da che furon con essa del par riferiti il *cerebro*, il *caglio* interno delle ossa cilindriche, e l' *asse molliccio* longitudinale ne' fusti degli alberi dicotiledoni?...— Così l'altra parola *Macchina* ampiamente ripetuta dalla piupparte degli Economisti, per effigiare un risparmio qualunque di *forze*, connesse insieme ad ottenere un risultato il più possibilmente proficuo; venne in luogo estremo impiegata da un egregio fra essi a caratterizzare gli animali da macello, *quali macchine da far carne:* Similitudine, che potrebbe agevolmente accomunarsi indi agli animali da schiena, *quai macchine da fare i trasporti;* a' cani, *quai macchine da fare o guardia o caccia;* a' cavalli, *quai macchine da far cammino e guerra*, ec. e la cui induzione, divenuta che fosse pensamento vulgare, avrebbe la tristissima e turpe conseguenza di spogliare ogni popolo de' sentimenti più doverosi di giustizia, e di carità, i quali forse scuotono e riscaldano il cuor dell' Uomo. Perchè esso, non potendosi onninamente privare de' mezzi di sussistenza e di agio, cui gli animali gregarj a' nostri più urgenti bisogni forniscono; ha saputo ben per tempo almeno accoppiare l' opinione del suo legittimo dominio cogli obblighi d'amicizia

e consuetudine, che lo legarono al cane ed al cavallo, e la prospettiva della propria utilità con una cura di benevolenza e di grato animo verso il bue, la cui società di travaglio ha servito al colono per tirare i primi limiti della possessione e della città: onde l'impeto sempre crescente della sua cultura morale, i comodi del civil consorzio, e l' irrefragabile superiorità de' suoi destini sulla Terra. E qui saremmo altrettanto e più sorpresi, dove ne piacesse con diligenza inoltrarci fra gli andirivieni, le ambiguità, e i guasti dalla Similitudine accagionati; non altro essendosi voluto da cotal tropo desumere, che baratto e abilitazione dal contesto e dal metodo d' una scienza, alla riforma e all' adeguatezza di una scienza diversa: quasicchè la Similitudine non possa comportarsi fra' confini, al certo difficili, del didatticismo, se non come il letto di Procuste, sovra cui adagiandosi facea d' uopo rimanere dislogati e convulsi per allungamento, o mozzi e contraffatti per accorciamento delle proprie membra. Così la Medicina, certo scienza men necessitosa di contraccambj e di favori, si è lungo tempo travestita e resa sconcia per la fisonomia posticcia, e per gli addobbi, ch' essa ha per gradi accattati dall' Anatomia, dalla Botanica, e dalla Chimica. E per istringere in una sola considerazioni variatissime, non abbiamo noi visto parecch' ingegni, abbarbagliati da un simulacro vano, intralciarsi, smungersi, e inettamente sterilirsi fra le diramazioni dell' *albero* appena denotato dall' esimio Cancellier Bacone (1), che con più aperto giudizio,

(1) E questo stesso Genio, eminentemente positivo, non fec' egli abuso della Similitudine, allorchè volendo pruovare come una soverchia Istruzione pregiudichi al Popolo, quantunque ad esso giovi una mediocre; adduce in documento

o con più maturo consiglio applicandosi a qualunque altro solido, e non vacuo e fumoso problema dello Scibile, molte verità definite, molte discusse, e molte ancor più avrebbero utilizzate?

Non è quindi che io riprovi ogn' illustramento, nè che repella ogni foggia di Similitudine dall' elocuzione didattica: anzi come una qualunque screziatura de' nostri pensamenti, a fin d' incutergli altrui, e renderli discernibili, è il più assiduo e cardinale officio dell' umana ragione; così poco prima ho dichiarato, e or ripeto, che la *Metafora* (la traccia più lieve di Similitudine) debba affatto ritenersi qual' elemento indispensabile d' ogni maniera, e di ogni categoria di linguaggio. Nè ciò pur basta, chè troppe volte l' induzione figurativa più brillante, l' induzione comparativa più ardita, l' induzione esemplificativa più straordinaria, meravigliosamente servono all' intelligenza nostra; se non per rivelare l' essenza profonda delle cose, almeno per coordinare fra esse le relazioni delle idee, cui abbiamo concepito, e possiamo concepir delle medesime. Con un tale spediente non certo si potrà mai di un colpo, e per un sol conato raggiungere la verità: ma il cammino sarà divenuto largo sebbene più lungo, e sicuro quantunque tortuoso. Adoprerò una, o due citazioni, per esprimermi con maggior nettezza — Fu già da un Uomo

l' *epispastico*, che appena applicato guarisce, continuato al contrario malmena e scompone le nostre carni? Quale paralogismo!.. Non minor forse di quello di Zenone, Capo degli Stoici; onde il famoso precetto, che *le colpe nostre tornino sempre uguali fra loro*, non ebbe fondamento più saldo, secondo ci narra Diogene Laerzio, del rapporto enorme di esse a parecchie navi, le quali tutte sarebbero fuori del porto (di Canopo, città presso una delle imboccature del Nilo, ci dicea) da cui si scostassero, sia per uno, sia per cento, sia per mille stadj.

di spirito per azzardo ragguagliato il *sistema nervoso* degli animali alle *tenui radicette* d' ogni pianta , le quali vegetar la fanno in mezzo alla terra , fra cui esse sparpagliansi e penetrano. Siffatto confronto pruova , che le similitudini nella più riserbata prosa didattica potrebbero, non che dicevoli , riuscir eziandio avventurose ; dapoichè sebbene molte differenze intercedano dalla vita di un animale alla vita di una pianta (sia per intrecciatura delle fila organiche , sia per composizion delle parti , sia per adeguatezza de' naturali impegni loro), con tutto ciò il parallelo schizzato appena delle note funzioni delle barbe di questa , colle non abbastanza note funzioni de' nervosi stami di quello , riverbera tosto con insolita luce alla curiosità della nostra Intelligenza. . . . E la piupparte delle verità fisiche non sono un risultamento di fortuita , o di abitual riflessione di pensieri ; un fenomeno, sarei tentato dire, *catottrico* della nostra perenne attività psicologica?

Ecco ora un altro diversissimo getto d' induzione figurativa — *L' universo*, meditava un profondo filosofo, *è una sfera*, *il cui centro può trovarsi in ogni punto dello spazio ; ma la circonferenza in nessun luogo* — In cotale similitudine non dee già rilevarsi un trasporto d' evidenza dalla Sfera che rappresenta , all' Universo ch' è rappresentato : pure l' umana ragione resta compiaciuta d' imbattervisi a tale quale dimostrazione indiretta, o negativa, d'un disegno immenso, e di uno spettacolo infinito... Le verità matematiche più solenni non poggiano talvolta, che sovra una considerazione di pari guisa.

Qualunque apologo poscia mi porgerebbe, se qui fosse uopo , una testimonianza ovvia dell' utilità e de' pregj

dell' induzione esemplificativa nell'elocuzione didattica, ovvero aforistica: i motti anzi, e i morali assiomi destinati a viepiù scuotere l'attenzione e 'l giudizio degli uomini, non potrebbero, senza mancare al loro scopo, destituirsi di simile risorsa di Bello e di Vero. Ne trascriverò quì alquanti, perchè gli stimo nel loro genere modelli — *Rispetta i tuoi simili; guardati di sprezzare alcuno:* anche un atomo fa ombra! — *Mostrati aspro co' malvaggi:* il cedro è incorruttibile, perchè amaro; gl' insetti non si attentano di toccarlo! — *Se vuoi innalzare* statua *ad un grand' uomo, comincia dal porne il piedistallo sulla sua* tomba — *Giovanetto, ricevi le parole del savio come una* spugna, *e quelle dell' ignorante come un* crivello! — *etc. etc.*

Tutto ciò premesso, non vuol credersi difficile d' assegnare i limiti, oltre i quali l' uso della Similitudine, nell' elocuzione didattica, trabalzerà irreparabilmente in abuso. Ma quindi convienmi rivenire per poco a quel che sopra ho accennato, e riprodurre in parte l' original pensiero del Sig. d'Alambert; cioè, che l'Immaginazione (in cui si accumulano senso, memoria, ed energia), e l'Intelligenza siano facoltà fra loro quasi consorti, e appena distinguibili nell'esercizio della ragione umana. *La meditazione*, ha osservato in proposito un Tedesco filosofo, Garve, *benanche sugli argomenti più astratti, non mai riesce meglio, se non dove l' Immaginazione abbiasi messo d'avanti, colla maggiore vivacità, e colla minutezza più possibile, l' obbietto su cui si raggira . . . Non mai uomo farà grandi cose, comunque lambicchi il proprio talento, se non è dotato di un' attitudine di combinazione abbastanza disinvolta, per pennelleggiare*

sotto facce e contorni sensibili le materie, ch' egli deve lavorare. Ha d' uopo inoltre di superiore forza di volontà, che diriga progressivamente sopra un piano, e secondo una invariabile norma, le di lui ricerche, le di lui operazioni, e i di lui più ardui concepimenti . . . . Dalla forza della volontà dipendon poi la perseveranza della contemplazione, l' evidenza del giudizio, la compattezza e la serie delle conseguenze analoghe, l' armonìa de' rapporti più lontani, e 'l pullulamento di tutte le idee accessorie . . . Lo spirito e la fantasìa associansi allora per incalzare nell' intero suo sviluppo un profondo ragionamento; e le speculazioni più aride, più intralciate, o più inventive, così brillano spesso delle grazie più seduttrici, delle induzioni più saettanti, e delle forme più inimitabili di scrivere . . . — Adunque la prima e fondamental regola pel buon impiego delle similitudini nell' elocuzione didattica, fia la temperanza dello stile, e la castigatezza de' fornimenti di gusto; poichè sarebbe al di là di ogni possa umana, abbandonati noi una volta al fervore ed all' alacrità dell' ingegno, di più comprendere a un girar d' occhio tutti gli aspetti d' identità e di scambievolezza delle idee, quali meglio ne giovasse fecondare, o far altrui appercepire. E quì opportunamente si colloca il precetto antichissimo di Manilio — *Ornari res ipsa negat, contenta doceri* — precetto, che non è secondo a qualunque altro in gravità.

Una diversa regola, nè meno importante, poscia quella fia, che le Similitudini, se non servono a far risplendere talune idee, nè a render vibrate talune espressioni; invece scompigliano e deturpano la facondia didattica (i cui pre-

gi son limpidezza, ordinamento, e facilità), nè meno esagerano, o divagano, o trambustano qualunque altra sia oratoria aringa. Una similitudine oziosa, ottusa, ed oscura, da cui non possa verità prorompere, non precetto inculcarsi, non induzione raccogliersi: una similitudine affatto strania, longinqua, ed incerta (come laddove l'immaginazione soperchi, e non aìti l'intelligenza) tantosto abbarbicandosi nel dominio della ragione, fruttificherà d'errori, o d'equivoci, o di pregiudizj; de' quali l'ingombro può giunger sino a mortificare in noi, o per lunga pezza comprimere l'istinto medesimo, che sempre noi malgrado ne suole indirigere e sollevare a una ragionativa evidenza.

E nondimeno, anche ad onta del più severo riguardo contr' ogni apparenza chimerica, e dello zelo più incontentabile per ogni reale nozione, egli è impossibile nell'Elocuzione didattica non isdrucciolar giammai in un qualche abuso di Similitudine: a bella giunta, perchè oltre i *nomi* proprj, e que' soli *verbi*, a' quali affiggiamo il significato delle nostre azioni esteriori, tutti gli altri vocaboli sono rappresentativi ed analogici, e però non equivalenti o sinonimi, a rigore, delle lor consentanee idee. Cotal necessaria, universale, incorreggibile inaffinità de' mezzi (per così dire) sensorj, alle cogitazioni intellettive è la perenne sorgente degli errori, e de' bisogni, onde della perfettibilità benanche all' uman genere!.. Ma inoltre di poi si badi a ciò, che la dicitura figurata, vagheggiando i sensi, storna di continuo l'attenzione, cattiva il giudizio, e ci dispensa dalla sodezza delle pruove, o dall'accordo de' titoli delle diverse idee, che asseriamo: senz' aggiungere, che il nostro amor proprio va ordinariamente più soddisfatto

di convincere altrui, che di persuaderlo, e di sorprendere, anzichè di capacitare.— Per cosiffatta guisa il maggior numero degli Autori, i quali presiedono all' insegnamento, si vantano ed inebriansi del successo di una giornata; mentre appena pochi la meditazione diuturna, un coerente ragionare (1) e la purgatezza filosofica dell' elocuzione, preparano in segreto a vivere lunghi secoli, de' quali intanto la piena attortiglia e sommerge la mediocrità, la vanagloria, e l' impostura.

(1) Avrei potuto accrescere la mole di queste osservazioni od accuse, dovunque tolte, sull' abuso della Similitudine nell' Elocuzione didattica, ch' è veramente quel genere di eloquenza o di scrittura, in cui più e bene spesso ha luogo; mentre, siccome con finezza ha avvertito il Signor de Marmontel (*Elemens de Litterature* Comparaison) *plus l' ame est occupée de son objet direct*, *moins elle regarde autour d' elle*; *plus le mouvement qui l'emporte est rapide*, *plus il est impatient des obstacles et des detours*: *enfin*, *plus le sentiment a de chaleur et de force*, *plus il maîtrise l' imagination*, *et l' empêche de s' egarer. Il s' ensuit*, *que* la narration tranquille admet des comparaisons frequentes; *qu' à mesure qu' elle s' anime*, *elle en veut moins*; ec. Ma le già addotte, quali ch' esse siano e quante, bastano all' uopo: all' uopo, cioè, di cautelare il nostro giudizio contro le false *Immagini*; non a fine di sottrarre lo spirito dalla necessità di usar di queste, cui acconsente ogni maniera di linguaggio, e 'l buon gusto renderà sempre altrui profittevoli. Chè nè possibile impresa (l' Omologia costituendo una forma originale del nostro pensiero), nè mica sarebbe a desiderarsi: importando la Similitudine ogni grazia, fulgore, e vigoria dell' espressione. L' Intelligenza medesima, se idonea fosse a rinunziarvi, tosto troverebbesi in un cammino difficile, cupo, disagiato; o per dir meglio, fora assorta in un' estasi perenne: mentr' essa mantiene il nostro commercio ideale coll' ajuto de' rapporti ostensibili delle cose, laddove ineffabili ne siano le nozioni proprie, e genuine. Mediante che il sapere umano si addoppia, prospera, svolgesi ognora più; o si avvantaggia per *credito* almeno: se a me non torna illecito d' adoperare una Similitudine!... Con tutto ciò bisogna, che i Dotti sommino, riconoscano, e bilancino di tempo in tempo i loro effettivi *capitali*, dove non vogliano di buon grado compromettere le Scienze tutte a una vergognosa, ed imperdonabile fallita.

OSSERVAZIONI

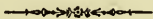
SOPRA

UN FENOMENO DI TRASUDAMEMTO LINFATICO

IN ALCUNE PIANTE GRAMINACEE

lette all'Accademia nella tornata de' 29 luglio 1850

DAL SOCIO RESIDENTE

Guglielmo Gasparrini

In diverse piante, segnatamente nelle graminacee, occorre di vedere in punta delle foglie, o sui denticciuoli posti nel contorno della lamina, una gocciola di limpido umore tanto simile alla gocciola di rugiada che perciò forse gli antichi botanici non ne facevano caso. Che questa gocciola non proviene dalla rugiada avvertirono primamente il *Guettard*, di poi l'*Hedwig*; con far vedere che veniva da escrezion particolare delle foglie. Il *Senebier* appresso, sono ormai cinquant'anni, faceva derivare tale escrezione dalla traspirazione insensibile divenuta sensibile in dato punto dalla troppa affluenza degli umori, soggiungendo che il *Prevost* in quel tempo attendeva con somma diligenza alla investigazione del fenomeno nelle piante graminacee. Egli pare che il *Prevost* non avesse compiuto le sue ricerche sopra tale subbietto, ovvero non si sia curato di pubblicarle; poichè altrimenti i fisiologi posteriori ne avrebbero parlato.

In fatti il sig. *Tenore* (*corso di botaniche lezioni tom. 3. Napoli 1816*) nelle sue istituzioni botaniche ragionando della traspirazione sensibile ed insensibile ricorda il fatto testè annunziato delle piante graminacee , ed adotta in generale la spiegazione datane dal *Senebier*, modificandola solo in un punto , siccome vedrassi a suo luogo nella presente narrazione. Nè il *Decandolle* nella Fisiologia vegetabile si discosta dall'opinione del *Senebier*; dappoichè dopo aver esposto le particolarità risguardanti l'esalazione acquosa, nella fine del suo dotto ragionamento ricorda l'opinione dell' *Hedwig* , che considerava l'esalamento acquoso come escremento liquido delle piante ; e quella dell' *Hales*, che il paragonava alla traspirazione insensibile degli animali. Egli poi credeva che l'esalamento nei vegetabili rappresentasse entrambe queste funzioni. Da ultimo dà notizia del fatto delle piante graminacee colle seguenti parole :

» L'attenenza con quest' ultima funzione (la traspirazione insensibile) è ancora manifesta sotto altro aspetto,
» cioè che talvolta la traspirazione vegetabile, quando è
» abbondantissima in un dato punto, diventa sensibile co-
» me il sudore in forma di gocciolina. Perciò si veggono
» frequentemente delle gocce di acqua che si formano nella
» sommità delle foglie del formento e di parecchie gra-
» minacee allo spuntar del sole. Queste goccioline si veg-
» gono ancora sui denticciuoli di alcune piante; esse so-
« no disposte con regotarità sulla foglia della cappuccina.
» Questi fatti si debbono riferire all' esalazione? Si deve
» considerare quest' acqua come una vera esecrezione, ov-
» vero come l'acqua ch'esce dall'estremità delle foglie di
» alcuni gigheri (*Arum*), o dalla sommità delle spate delle

» palme? Si debbono essi ravvicinare all' uscita dell' umore
» della vite? Sarebbe utile istituire nuove osservazioni so-
» pra questo soggetto ».

Per quanto noi sappiamo niuno dopo il *Decandolle* ha più ampiamente od altrimenti parlato di questo fatto. Onde seguitando il consiglio del celebre botanico di Ginevra diamo il risultato delle osservazioni da noi fatte. Queste osservazioni son cadute sul granone (*Zea mays*), l' orzo (*Hordeum vulgare*), la segala (*Secale cereale*) ed il formento (*Triticum sativum*).

Il granone seminato in autunno 1849 a dì 26 ottobre, come prima spuntava dal terreno mostrava una foglia incartocciata costituita della sola guaina o picciuolo. Essa nello spazio di un giorno giunse all' altezza di circa un pollice; e nel giorno seguente avea nella sommità una gocciolina di limpido umore. Le foglie, che vengono appresso, son tutte costituite di picciuolo incartocciato e di lamina. Spuntava la seconda e la terza foglia, ed ecco la gocciola nella loro sommità. Sulla quarta foglia di raro apparisce; sulle altre che seguitano non mai. Scorre l' umore lungo l' orlo e sulle facce della foglia, ovvero gocciola, riproducendosi esso continuamente. Tale fenomeno durava nella sua pienezza, in ciascuna foglia, circa tre giorni, talvolta quattro: in certe sperienze pareva finito al quinto giorno, ma ritornava al sesto, continuandosi debolmente al settimo ed ottavo, di raro infino al dodicesimo. Quando continua oltre il quarto o quinto giorno qualche gocciolina si mostra ancora sul margine, d' ordinario a poca distanza dalla sommità della foglia. Nè altrimenti avviene in primavera, tranne che l' uscita dell' umore suol durare minor tempo, però non meno di tre giorni.

In qualunque stagione l'umore vien fuora in tutte le ore del giorno, ma in più copia nella oscurità, e per conseguenza di notte, così nella stanza, come allo scoperto. Si mostra ancora sulle pianticelle esposte alla luce diretta non molto forte, purchè l'aria sia tranquilla e piuttosto umida. Deve variare inoltre il fenomeno per la qualità del terreno, in quanto si può giudicare dalle piante nate nella sabbia ferruginosa, lavata avanti con acqua di pozzo, dei contorni di Resina; alcune delle quali in maggio passato non diedero umore di sorta, altre qualche gocciolina, e solo per un giorno.

La segala, l'orzo, ed il fromento seminati a dì 26 ottobre dell'anno scorso, a capo di due giorni ch'erano spuntati davano la gocciola in punta della prima foglia incartocciata; e poco appresso sulla seconda in punta della lamina; la quale gocciola raramente apparisce sulla terza foglia; sulle altre che vengon dopo non mai. Durava il fenomeno circa sei giorni; nel rimanente, siccome nel granone, cadendo l'umore, o calandosi lungo la foglia, riproducevasi in brevissimo tempo, ed in qualunque ora del giorno, alla luce diretta o diffusa, nella oscurità, nella stanza, all'aria scoperta, e quasi sempre colla stessa forza. Sulla seconda e terza foglia la gocciola appariva infin da quando spuntavano le loro sommità, mentre ancora eran coperte dalla foglia primordiale.

Queste poche e semplici osservazioni dichiarano che il fenomeno anzidetto non può dipendere dall'esalazione acquosa. Imperciocchè

1.° L'esalamento essendo nullo quando la foglia è coperta dalle soprastanti, non perciò manca la gocciolina di umore sulla sommità appena sporgente.

2.° L'esalazione essendo debole o nulla in tempo di notte, allora dovrebbe mancare la gocciolina.

3.° Il fenomeno si osserva solo nelle foglie primordiali, e temporaneamente, non ostante che dopo crescessero un poco (massime la seconda e la terza), e così in esse come nelle seguenti l'esalazione acquosa non mancasse mai.

4.° L'esalamento si fa per le facce della foglia, principalmente per la inferiore; mentre l'umore esce sempre dalla sommità, e talvolta a poca distanza ma dall'orlo.

5.° E poi come mai la linfa nell'uscire in forma di vapore si condenserebbe sulle foglie nei punti indicati? Ciò non potrebbe succedere che pel freddo dell'aria; nel qual caso l'esalazione sarebbe debolissima o niente.

Ma se l'umore nella sommità delle foglie primordiali delle piante graminacee anzidette non deriva da esalazione; nientedimeno questa funzione influisce molto sull'abbondanza o scarsezza di detto umore; non che sulla sua apparizione in certe ore del giorno, siccome si deduce dalle seguenti osservazioni fatte nella primavera di questo anno.

La segala seminata a dì 10 aprile nella sabbia ferruginosa, lavata più volte nell'acqua di pozzo, in sullo spuntare diè la gocciolina, che in breve sparì, in punta di parecchie pianticelle; la quale nei cinque giorni seguenti formavasi solo la notte non ostante il continuo annaffiamento. Que' giorni però furono piuttosto sereni e secchi. Ma la mattina del 23, ch'era nuvolosa, l'umore stava su tutte le foglie; riproducevasi infino alle 7 antimeridiane, lasciando nello svaporarsi sul vetro una macchia biancastra; di poi sparì come prima l'aria diventò serena ed asciutta. Il giorno 24 fu nuvoloso e piovoso; trovai le

gocciole su tutte le foglie, e come cadevano riproducevansi continuamente; ancora nella sommità di quelle foglie ch' io avea unte di olio alla loro base per impedire l'attività capillare della epidermide, se mai ci fosse stata. Le quali osservazioni fanno almeno sospettare, se non dimostrano, che nei giorni sereni l'esalazione forte impedisce la formazione delle gocciole.

Per assicurarmi di ciò ne' giorni seguenti feci questa esperienza. Alle 5 $\frac{1}{2}$ del mattino fatte cadere le gocciole da tutte le foglie, vidi che non si riproducevano, essendo l'aria piuttosto chiara e secca. Alle 10 $\frac{1}{2}$ posi sulle piante una campana di vetro; ed ecco formate le gocciole in meno di mezz' ora. La quale esperienza ripetuta più volte collo stesso risultamento dichiara, che come l'aria compresa sotto la campana diventava umida e non assorbiva il vapore esalato dalle foglie, l'umore in esse trattenuto usciva finalmente dalla loro sommità, non mai cessando le radici di attrarne dal terreno e mandarne alle parti superiori. Lo stesso effetto si ottiene quando si cuoprono le piante altrimenti che colla campana di vetro, massime con impedire il passaggio alla luce. E si vide inoltre sparire le gocciole in breve tempo, dalle sei alle sette ore del mattino come il sole si alzava, anche annaffiando abbondevolmente; nè altrimenti ricomparire, continuando l'aria ad essere serena, che col mezzo della campana. E possono ancora mostrarsi per molti giorni sussecutivi, come si vide appunto nella segala seminata nella sabbia ferruginosa a 10 aprile, che ne produsse continuamente dal dì 15 infino al termine del mese nel modo anzidetto, cioè costantemente la notte, e variamente il giorno secondo le variazioni atmosferiche sopra esposte, non ostante fossero

giunte le foglie all' altezza di oltre un palmo ed alcune rivolte in giù.

A dì 9 maggio seminai la segala nella sabbia ferruginosa e nel terreno comune; la prima spuntava nel terzo, la seconda nel quarto giorno. In entrambe trovava le gocciole alle 5 del mattino; le quali sparite alle 8, per effetto della luce e del calore, non più tornavano infino alle 12 della sera. Ricomparivano esse dopo la mezzanotte; e ciò avvenne per tre giorni di seguito tanto nella stanza, quanto all' aria scoperta. Nel dì 17 verso le 8 della sera parecchie piante mostravano un po' di umore in cima alle loro foglie; tutte poi ne aveano in copia la mattina appresso: e l'esperimento della campana di vetro produceva il solito effetto. Ma in tutte le ore del giorno 19, che fu umido e coperto, l' umore gocciolava. Onde si vede esser variabile il fenomeno secondo lo stato dell' aria, umido o secco, sereno o coperto; ed ancora secondo la sua temperie. Ma oltre sì fatte cause della sua variabilità ce n' ha altre ignote. Imperciocchè si osserva talvolta tra piante uguali in grandezza, rigoglio ed età, che alcune, soltanto in qualche giorno, non danno umore dalle loro foglie, quasi si riposassero; il che succede ancora, sebbene più raramente, a tutte le piante nella stessa grasta. La segala nella sabbia ferruginosa non avea umore la mattina del 16 maggio, mentre l' altra nel terreno comune n' era sopraccarica, ma ritornava copiosamente nel giorno appresso. Forse alla variabilità del fenomeno concorre pure la natura del terreno. Perchè nello stesso giorno 9 maggio avendo seminato il granone nella solita sabbia e nel terreno comune, il primo non dava umore se non col mezzo della campana, tranne una sola volta, che naturalmente e per

brevissimo tempo ne mise fuora in una foglia due goccioline; l'altro poi ne dava sempre in qualunque ora del giorno nel modo avanti esposto, pure alla luce diretta, ma per poco tempo.

Essendo adunque così, che l'umore il quale viene in punta alle foglie delle menzionate graminacee non deriva essenzialmente dalla esalazione, vediamo se proviene da secrezione e per conseguenza da ghiandole. Nella sommità delle foglie non ci son ghiandole, nè peli, nè stomi, nè forellini; ci ha solo parenchima cellulare alquanto diverso dal sottostante (da cui non trasuda umore standovi anche gli stomi) nella forma e grandezza delle cellule, e per la natura della sostanza in esse contenuta, ch'è una materia rossastra finamente granellosa, non già clorofilla; la quale materia rossastra si osserva ancora nel parenchima del margine a certa distanza dalla sommità. Sì fatto perenchima perciò non si può tenere in conto di ghiandola, e l'umore che ne trasuda non è effetto di secrezione. Questo umore inoltre, in sembianza di gocciola di rugiada, non contiene globuli alla maniera di certi umori segregati: è limpido, insipido; col microscopio non vi si scuoprono sostanze estranee; anzi pare più trasparente e fluido dell'acqua in cui si scioglie compiutamente, siccome fa ancora nell'acquarzente. Ma isvaporandosi sul punto onde sorge, lascia ivi una materia biancastra in forma di pellicina raggrinzita, la quale essendo inalterabile all'azion della potassa caustica non pare perciò di natura albuminosa. Anzi si scuoprono in essa col mezzo del microscopio alcune concrezioni scabrose, come fossero gruppi di cristalli colle punte prominenti: sono concrezioni di materie inorganiche, che spariscono nell'acido azotico. Ora le gocciole

raccolte sul vetro lasciano, isvaporandosi, la stessa materia inorganica; nel qual caso si può osservare al microscopio che come l'acqua di vegetazione in cui è disciolta diminuisce, si addensa essa con evidenti segni di cristallizzazione sul sistema del cubo. Quella dell'orzo seminato nel terreno comune è costituita, giusta l'analisi fattane dal professor *Napoli* circa la metà di novembre, di solfato di calce e di magnesia, e di clorori. E sebbene la quantità non sia stata ora determinata rispettivamente all'acqua di vegetazione in cui si trova disciolta, tuttavolta essa pare molto maggiore di quella che vien fuora coll'esalazione. Imperciocchè il *Senebier*, secondo riferisce *Decandolle*, ha trovato che in 11,500 parti di acqua esalata dalle foglie della vite appena ci sta $^{1}/_{25000}$ di materia estranea, della quale per altro s'ignora la natura. Di maniera che se questa osservazione sulla vite è esatta, siccome pare non potersene dubitare, e si verificasse in altre piante; essa, standovi tanta pochezza di materia estranea, punto non sembra favorevole all'opinione di coloro che considerano l'esalamento come funzione escrementizia. E dappoichè l'umore cacciato fuora dalle piante graminacee raccogliesi in punta alle loro foglie, e sul margine, in forma di goccioline, per non confonder queste, derivanti da trasudamento linfatico, colle gocciole di rugiada, la presenza dell'anzidetta materia terrosa, o la posatura che lascia la linfa isvaporandosi sul vetro, è forse il segno meno fallace per distinguere l'uno dall'altro fenomeno.

Viene la gocciolina nella sommità della foglia giusto nella direzion della rachide, e dal lato corrispondente alla faccia inferiore. Facendola cadere e guardando colla semplice lente il punto dove stava, si vede chiaro un trasu-

damento, che in meno di dieci minuti, quando è nella sua maggiore pienezza, diventa una piccolissima gocciola sensibile alla vista naturale.

Quando si recide per traverso la foglia del granone alla distanza di poche linee dalla sommità e si guarda colla lente semplice sul taglio, si vede subito un trasudamento in tre punti, per cui in pochi minuti si formano tre goccioline; trasudamento, che (notato anche dal *Prevost* secondo riferisce il *Senebier*) viene giusto in punta di tre fibrilline recise. Tagliando la foglia più in giù appariscono cinque goccioline sopra altrettanti nervi o fibrilline recise; sette nella metà della lamina, precisamente quante sono le fibre. Cosicchè il numero delle goccioline corrisponde sempre a quello delle fibre o nervi primarii longitudinali, onde la foglia è fornita nel punto della recisione. Ciò succede per tutto il tempo in cui trasuda l'umore; come prima cessa il trasudamento la foglia del granone diventa di color verde cupo, pelosa in entrambe le facce infino alla sommità; e recidendola non dà tante gocciole quanti sono i nervi recisi, dei quali solo il mezzano talvolta e lentamente fornisce la sua; il che per altro dura pochissimo tempo. L' umore che sorge dalle fibre recise punto non differisce in colore, limpidezza, sapore e nella natura delle sostanze inorganiche in esso disciolte da quello che viene naturalmente in punta alla foglia intera. Le fibrilline son costituite d' un fascetto fibroso-vascolare con le trachee nel centro coperte da cellule allungate alla maniera ordinaria del tessuto fibroso degli organi appendicolari. Di raro in quella giovinezza della foglia si trova qualche vase annulare in compagnia delle trachee; il che incontra allora a vedere solo verso la parte inferiore della

lamina. Le stesse cose si osservano nell' orzo, nel formento e nella segala tanto rispetto all' uscita dell' umore per effetto della recisione , quanto per le sue qualità sensibili; ancora in ciò che risguarda la struttura delle fibre. Infine nelle quattro menzionate piante l' umore che vien fuora dalle foglie recise gocciola talvolta , non altrimenti che dalle foglie intere , per due giorni in qualunque ora.

Laonde l'umore, ch'esce dalla foglia spuntata o recisa a qualunque distanza dalla sommità , è la linfa o umore ascendente ; e dappoichè somiglia affatto a quello che viene naturalmente in punta della foglia intera, seguita che l'uno e l'altro hanno la stessa origine. Ne segue ancora che questa linfa sale alle parti superiori solo per i vasi spirali, non avendocene , almeno nel cominciare il trasudamento, d'altra sorta ; che non vi è attirata dall' esalazione acquosa , nè dalla crescenza delle foglie , siccome in altre piante , ma vi giunge forse per la stessa forza che sospinge l' umor della vite ad uscire dalle ferite avanti lo sviluppamento delle gemme in primavera : e finalmente che la maniera come si generano le gocciole così in punta alle foglie intere, come sulle trachee recise, dichiara essere l' umore ascendente sospinto da quello che attraggono continuamente le radici ; e giunto alla sommità della foglia , trapelando prima dalle trachee nelle cellule del parenchima, o negli spazii tracellulari, finalmente scappa fuori trasudando dalla epidermide. Le trachee infatti non giungono proprio infino al punto ond' esce l' umore , ma si rimangono a poca distanza, dove diversi fascetti di esse convergono e si uniscono insieme , d' ordinario tre , il mezzano che scorre lungo la rachide con i due laterali.

Si è detto che nel granone apparisce ancora qualche

gocciolina sul margine a poca distanza dalla sommità della foglia. Deriva essa dalla stessa linfa condottavi forse dalle fibre più distanti dalla rachide, le quali quantunque sotto all' estremità della lamina convergano verso la mezzana costituente la rachide, tuttavolta non la raggiungono siccome fanno le due laterali ad essa più vicine. Inoltre tra le fibre primarie longitudinali ce ne stanno altre di secondo ordine più sottili, le quali non mancano di dar fuora le gocciole quando sono recise. Le une e le altre nel loro cammino, allorchè la foglia è alquanto cresciuta, mandano lateralmente fibrilline trasversali, onde ne deriva un tessuto fibroso vascolare reticolato, per le quali giunge l' umore al margine formandovi talvolta una gocciolina a molta distanza dalla sommità della foglia. Nè questa spiegazione si può dimostrare col mezzo della recisione longitudinale, siccome abbiam dimostrato il cammino della linfa che forma la gocciola nella sommità con recidere la foglia trasversalmente; perchè le fibrilline longitudinali essendo molto vicine, nel taglio secondo la lunghezza dell' organo non ci ha diligenza che basti per cansarle, nè ragion di credere che la gocciola in tal caso anzichè da quelle provenga dai ramuscelli vascolari trasversali. Intanto la piccolezza di queste gocciole sul margine, la rara e tardiva loro apparizione concordano naturalmente colla sottigliezza e tardiva formazion delle fibrilline trasversali, e col moto lentissimo della linfa nel deviare dai canali rettilinei longitudinali.

La linfa ch' esce dalla sommità delle foglie nelle menzionate piante graminacee è quella che sovrabbonda alla capacità e bisogno loro. Dinota essa abbondanza di umore e niente più, proveniente da due cause, dalle radici e

dalla umidità. Nel germogliamento le radici in numero di tre a cinque precedono il fusto e le foglie ; esse allungandosi assai e diramandosi in brevissimo tempo formano una barbata , che tutta insieme avanza molto la parte ascendente costituita allora di tre foglie sopra un fusto appena distinguibile ; radici poi fornite , per essere tanto giovani e fresche , di gran forza assorbente. Rispetto alla umidità, egli si vede alla campagna, nel terreno bagnato, le gocciole abbondar sì come fosse caduta la rugiada, ed esser rare o mancare affatto nel rasciutto o poco inumidito. Il che si osserva meglio nelle piante coltivate in graste tenute nella stanza , dove l' acqua si può dare a talento. Difatti in dicembre dell' anno scorso , alla segala germogliata non avendo somministrato acqua per tre giorni , il terreno rasciugatosi un poco , le pianticelle non davano umore. Ciò non ostante si mostravano esse rigogliose , anzi crescevano di giorno e di notte come quelle dell' orzo e del formento loro compagne di età ; ma queste per essere annaffiate ogni dì porgeano continuamente le gocciole. Stando così le cose, a capo del terzo giorno, a mezzodì , annaffiai la segala ; ed ecco immediatamente ricomparire il trasudamento in punta alle foglie, ed in meno di dieci minuti già qualche gocciolina scorgevasi colla vista naturale.

Questa sperienza ad un tempo dichiara lucidamente la celerità e forza con cui l' umore è assorbito dalle radici, sospinto alle parti superiori e cacciato via come esuberante ; dappoichè avanti l' annaffiamento non ne avanzava , e ciò non di meno le pianticelle crescevano colla stessa vigoria di quelle del formento e dell' orzo annaffiate ogni dì, e da cui perciò l' umore non cessò mai di gocciolare.

Laonde dalle osservazioni esposte si deduce che l' umore il quale trapela dalle prime foglie di certe piante graminacee , poco appresso al germogliamento non deriva dall' esalazione acquosa , nè da secrezione per opera di ghiandole ; e che nè anche si può considerarlo come escrementizio : poichè in tal caso esso sarebbe in stretta attenenza colla nudrizione e non mancherebbe mai in tutta la vita della pianta ; mentre che s' è veduto provenire da abbondanza di acqua e durare pochi giorni. Esso umore perciò vien fuora dalle parti intere per semplice trasudamento , quando le radici ne assorbono più di quanto fa mestieri all' esalazione ed alla nudrizione nella prima giovinezza del vegetabile.

Tale appunto era l' opinione del Trevirano, secondo riferisce Decandolle ; la quale procedendo forse dal solo esame fatto sulla qualità dell' umore è rimasta infino ad ora quasi nei termini di una supposizione. Ma le sperienze di sopra esposte conducono dirittamente alla medesima conclusione ; e ne deriva che in altre piante le stesse cause possono produrre lo stesso effetto. Imperciocchè nella estremità delle foglie della *Musa,* e di parecchie piante appartenenti all' ordine delle aroidee , e sui denticciuoli di quelle della cappuccina vengono le gocciole non altrimenti che per abbondanza di linfa, quando le radici son circondate da molto umore , e l' aria umida poco favorisce l' esalazione. Vengono queste gocciole in luoghi determinati , sempre in corrispondenza dei fascetti vascolari conduttori della linfa ; il che fu osservato e detto dal sig. *Tenore* , quando per rispetto alle piante graminacee , modificava la spiegazione del *Senebier* dicendo che « questo » fenomeno si verifica specialmente nelle foglie puntute

» con nervature semplici, perchè in esse molti vasi van-
» no a terminare allo stesso luogo, onde maggior copia
» di acqua vi si riunisce, e le gocciole più difficilmente
» possono svaporarsi ». Ed inoltre in una apposita scrittura pubblicata tre anni sono nel rendiconto della R. Accademia delle scienze (*Osservazioni morfologiche sopra alcune spezie di zucche = Rendiconto della R. Accademia delle scienze di Napoli, quaderno 36.° - 1847*) facemmo vedere come nelle zucche in tempo di autunno, segnatamente quando il terreno è bagnato, e l' aria, tra per la bassa temperatura e l' abbondante umidità, poco favorevole all'esalazione, parte dell'umore mandato dalle radici si versa nelle cavità dei picciuoli e del fusto.

La spiegazione di tali fenomeni trovata in quello delle piante graminacee non sappiamo quanto potesse valere per altri consimili o poco differenti, almeno in apparenza, osservati in diverse piante, non avendoli potuto esaminare. Notano i fisiologi che nell' *Amomum zerumbet* trasuda umore dalla base delle squame fiorali o brattee, e nella *Maranta gibba* dalla base del perigonio. Nelle piante dei generi *Nepenthes*, *Sarracenia*, *Cephalotus*, *Margravia* e *Norantea* si trova umore più o meno abbondante in certe cavità dette ascidii, costituite da una particolar trasformazione di tutta la foglia, o di una parte di essa. Il signor Trinchinetti (*Biblioteca italiana tomo 82. Milano 1836*) ha osservato in molte piante appartenenti ad ordini differenti, che nel contorno delle foglie, in punta di certi bitorzoletti da lui addimandati glandole perifille, di notte e talvolta anche di giorno, essendo l' aria fresca e nuvolosa, apparisce una gocciola di limpido umore; e pruova con esperienze non dipendere essa dalla rugiada nè dalla

traspirazione insensibile ; ma crede che sia segregata dalle glandole , e che tal funzione rappresenti nelle piante la secrezion delle urine degli animali. Il padre Leandro riferisce che l' albero del Brasile addimandato *Caesalpinia pluviosa* ha meritato appunto tal nome dall'umore acquoso, che ne gocciola in copia in sembianza quasi di pioggia.

Dubitano i fisiologi se fenomeni sì fatti dipendono da secrezione o dall' esalamento , ovvero dall' insensibile traspirazione ; e noi non avendoli esaminati non sapremmo adesso, senza certo pericolo di errare, entrar in mezzo alle controversie per togliere il dubbio. Tuttavolta non possiamo tacere che alcuni di essi hanno attenenza sì stretta con quello delle piante graminacee , stando alla semplice relazione, da far sospettare che poco o niente ne saranno differenti in quanto alla natura ed alle cause onde derivano. Imperciocchè i bitorzoletti o ghiandole perifille del Trinchinetti niente altro sono in essenza che i denticciuoli semplici ovvero un poco ingrossati posti nel contorno delle foglie. Ora ad ogni denticciuolo va un fascetto vascolare conduttore della linfa; la quale , cessata l' esalazione in tempo di notte e diminuita nei giorni coperti , giunta al denticciuolo nè potendo trascorrere più innanzi , pressata e sospinta da quella che mai sempre vi giunge , finalmente deve trapelar fuori.

Niuna pianta più della *Nepenthes* ha attirata l' attenzione degli osservatori, come quella che in una borsa, detta altrimenti ascidio , pendente dalla sommità della foglia contiene molto umore. Ora sì fatto ascidio formasi dal dilatamento della sommità del nervo mediano ; e questo avendo vasi in copia arreca l' umore che poi trasuda nella cavità , la natúra linfatica del quale fu già ravvisata dal

Trevirano. Nè contro a sì fatta opinione sembrano di gran momento le particolarità di struttura notate nell'ascidio, nè la quantità (circa 1 per 100) delle sostanze organiche ed inorganiche nell'umore disciolte, nè la loro natura (cioè materia organica principalmente di acido malico ed un poco di acido citrico, cloruro di potassio, soda, calce, magnesia) giusta l'analisi del sig. *Woelcker*. Dappoichè le sostanze inorganiche entrano coll'acqua; e la linfa scioglie e trasporta qualche sostanza organica nel suo cammino; siccome si vede in quella della zucca quando si versa nelle cavità interne del fusto e dei picciuoli; la quale non si raccoglie ivi certamente per effetto di secrezione mancandovi il tessuto ghiandolare, e contiene albumina e glucosa, a parte della materia inorganica. Finalmente il fatto dell'albero brasiliano testè nominato nè anche sarà differente da quello delle piante graminacee, da cui in certi giorni l'umore gocciola continuamente, e che noi abbiam veduto non derivare dall'esalazione, nè dalla traspirazione insensibile, nè da secrezione per opera di ghiandole; ma venir fuora dalle parti intere per semplice trasudamento, quando le radici ne assorbono più di quanto è mestieri ai bisogni della vita.

INDICE

DEL PRESENTE FASCICOLO

Prezzo del presente fascicolo . . . . . ⟿ 0, 25

ATTI

DELL'ACCADEMIA PONTANIANA

FASCICOLO II DEL VOLUME VI

AVVISO

L'accademia Pontaniana pubblica i suoi atti in fascicoli, affinchè possano sollecitamente conoscersi le memorie a misura che sono approvate.

Ogni fascicolo si pubblica subito che si ha sufficiente materiale e senza astringersi ad alcun determinato periodo o numero di fogli.

Terminati i fascicoli che debbono comporre un volume, si dà il frontespizio, la dedica, la storia de' lavori, ed il catalogo degli accademici da premettersi al volume medesimo.

NAPOLI
DA' TORCHI DEL TRAMATER
1852

CENNO BIOGRAFICO

INTORNO

AL CAPITANO INGEGNERE GEOGRAFO

FRANCESCO FERGOLA

letto all' Accademia in gennajo 1846

DAL SOCIO RESIDENTE

Fedele Amante

Chiarissimi Colleghi

Un dovere di antica amicizia m' impone quest' oggi il pietoso ufficio di parlarvi brevemente del nostro chiaro e virtuoso collega capitano Francesco Fergola, non ha guari mancato ai vivi in modo lagrimevole e funesto. Moriva egli il giorno 25 novembre 1845 nel più florido stato di salute, fra le più belle speranze di portare fra poco a compimento le importanti misure terrestri da lui così bene incominciate e condotte già a buon punto, nel momento in cui la sua famiglia aveva urgente bisogno del suo consiglio e del suo aiuto; moriva in un subito senza avvertire la morte, colpito dal fulmine sul monte di Antennammare dove stava da più giorni per le operazioni geodetiche. Onde misurare la perdita che hanno fatta in lui la scienza, la patria e gli amici, non vi dispiaccia udire di alcuni principali particolari della sua vita.

Francesco Fergola nacque in Napoli il dì 1 maggio 1791 da virtuosi genitori, ed in agiata fortuna. Ma il padre di lui, dato al commercio, non tardò a sperimentare le vicende di questo lusinghiero ed instabile elemento, per modo che in pochi anni, lasciati gli affari, gli rimase forse meno del bisognevole per la sussistenza di numerosa famiglia. Avventurosamente però i semi di buona morale sparsi da lui e dalla virtuosa consorte ne' loro figliuoli avevano fatto frutto, e cinque figli del miglior sesso erano già ad essi di consolazione e di sostegno.

Poco regolari furono i primi studi di Francesco, sebbene il fanciullo si mostrasse molto volenteroso di apprendere, e deve ciò attribuirsi alle condizioni generali de' tempi, non meno che alle speciali della sua famiglia. Fatto più adulto, incominciò a studiare matematiche, e quantunque fosse strettamente congiunto in parentela col riputatissimo Professore *Nicola Fergola*, rari e scarsi furono gli ammaestramenti che potè ritrarne, non per mancanza di affezione dello zio, ma per le molte occupazioni di lui, che era in quel tempo quasi il solo educatore della gioventù napolitana nelle matematiche discipline; per la qual cosa il giovane Francesco ebbe a guida negli studi matematici piuttosto alcuni valorosi allievi del Fergola (1), e dovette poi la sua compiuta istruzione all' intenso suo amore pel sapere più che a qualunque estraneo aiuto.

Giunto all' età di venti anni Francesco Fergola fu ammesso in qualità di aspirante ingegnere nel Gabinetto topografico di Napoli, diretto allora dal celebratissimo geografo *Rizzi-Zannoni*, dove apprese le pratiche della To-

(1) Il Sacerdote *Giannattasio*, ed il chiarissimo professore cav. *Flauti*.

pografia ed il disegno topografico. Dopo pochi anni, quello stabilimento, che tra i primi in Europa era stato nel passato secolo creato dalla munificenza di Re FERDINANDO BORBONE, fu dallo stesso Monarca riordinato e restaurato, ed al chiarissimo colonnello (ora Generale) *Visconti* fu dato il carico d'introdurvi i nuovi metodi geodetici, e di dargli in tutto la fisonomia del secolo. Divenuto l'Officio topografico un istituto militare, nel 1816 il nostro Fergola ottenne per concorso il grado di sottotenente dello stato maggiore dell'esercito addetto al corpo degl'ingegneri geografi, ed in quel cimento risultò primo per ordine di merito. Questo anno 1816 segna un'epoca notabile per l'Officio Topografico di Napoli, poichè d'allora incominciò il Fergola ad arricchirlo de' suoi importanti lavori geodetici. Non mi farò quì a descriverli a parte a parte, chè troppo dovrei dilungarmi, e mi limiterò soltanto ad accennare i risultamenti più rilevanti da lui ottenuti, e le principali difficoltà superate.

Il primo lavoro geodetico, ed il solo di 2.° ordine, affidato al Fergola fu nel 1816 la triangolazione de' contorni di Napoli, che ha servito poi, quasi esclusivamente, alla costruzione della bella carta di quella regione pubblicata dal R. Officio Topografico. Nel seguente anno 1817, essendosi intrapresa la costruzione della carta di cabottaggio della costa del Regno bagnata dall'Adriatico, col concorso degli uffiziali austriaci, ebbe Fergola il carico della parte più difficile della triangolazione geodetica, poichè trattavasi di estendere i triangoli sino al capo di Leuca, e congiungerli all'isola di Fanò per determinare con esattezza la bocca dell'Adriatico. Or nelle ultime due Puglie il terreno non è abbastanza piano per dar passaggio a lun-

ghe visuali, nè abbastanza aspro per potersi da luoghi eminenti scoprire lungo tratto di paese; e però i triangoli geodetici dovevano essere di necessità molto piccoli, sottoposti specialmente alla condizione di non allontanarsi dalla costa. Giunse perciò il Fergola al capo di Lecce con triangoli aventi lati di poche miglia, mentre gli era imposto di saltare a piè pari l'Adriatico con lati di quasi cinquanta miglia. Quì egli dovette porre in pratica non solo tutta la sua perizia geodetica, ma benanche gli ammaestramenti della Geometria, onde distese un poligono da S. Nicola di Casole a Leuca, e non ad uno de'piccoli lati di esso, ma alla diagonale congiungente i due punti estremi appoggiò il gran triangolo che doveva valicare il mare; senza il quale ripiego, che riuscì perfettamente, non avrebbe potuto dare a quell'ultimo importante anello, e quasi scopo principale della triangolazione, la necessaria condizione geodetica.

Dopo questa commissione, fece parte il Fergola di una spedizione d'ingegneri napoletani, tedeschi ed inglesi nelle isole Jonie ad oggetto di rettificare la carta idrografica di quelle isole, e nell'anno appresso ebbe pure una parte subalterna nella seconda misura della base di Castelvolturno diretta dal fu colonnello *Melorio*. In seguito aveva incominciato ad estendere la triangolazione di 1.° ordine nella provincia di Terra di Lavoro, allorchè sopragiunse la catastrofe del 1820, e furono sospesi i lavori. Nel 1822, essendo stato sciolto lo stato maggiore dell'esercito, fu il nostro Fergola messo in disponibilità. Restato per più anni senza altre occupazioni, si diede con molto successo ad insegnare le matematiche pure e miste, nel quale uffizio feccsi ammirare per lo zelo (che era per

lui un istinto in tutto ciò che faceva) non meno che per il sapere e la diligenza, nella parte attenente a' calcoli ed alle costruzioni grafiche. Richiamato all' Officio Topografico nel 1828, a' suoi compagni assai più che a lui dispiacque il vederlo, per l' avvenuta interruzione di servizio, graduato dopo di loro; egli sostenne sempre con grande dignità i colpi dell' avversa fortuna.

Continuava il Fergola nel 1830 e nel 1831 la triangolazione di 1.° ordine della provincia di Terra di Lavoro, estendendola negli Abruzzi, allorchè surse a ponente della Sicilia il vulcano submarino, che fece mostra di se e tosto disparve. Sembrò al Real Ministero della guerra opportuna l' occasione per alternare i lavori geodetici nelle due parti del Regno, e fu dato ai tenenti Fergola ed *Alfaro* il carico di distendere una rete di triangoli fra Palermo e Sciacca, e lungo la costa Nord Ovest dell'isola; di levare la pianta topografica di Trapani, e di determinare astronomicamente e trigonometricamente la posizione del nuovo vulcano. In questo lungo e svariato lavoro ebbe Fergola la parte principale, e rimasto in Sicilia per un altro anno dopo averlo terminato, continuò la triangolazione da Palermo sino a Messina e sulle coste della Calabria. Non credo che siasi mai fatto da alcun uomo in egual tempo un lavoro così difficile e tanto esteso ed esatto siccome quest' ultimo eseguito da Fergola, per il quale si venne poi a conoscere la precisa differenza di longitudine fra Napoli e Palermo.

Riprese le operazioni geodetiche nelle provincie di qua del Faro, Fergola ultimò la triangolazione di 1.° ordine degli Abruzzi che doveva principalmente servir di base alla carta della frontiera del Regno comandata da S.M.

il Re N. S. Notevolissimi furono alcuni risultamenti di questo grandioso lavoro. Primamente i nostri triangoli furono posti in comunicazione con quelli delle Marche e dell'alta Italia, e però della intera Europa; e non si trovò sul lato di unione, Civitella del Tronto-Montepagano, che la differenza di qualche palmo; il quale troppo splendido confronto, se dovette in parte attribuirsi ad un eventuale compenso di errori, offrì però sempre una buona guarentia dell' esattezza delle operazioni. Riuscì inoltre al Fergola di legare alla triangolazione del Regno la cupola della chiesa di S. Pietro in Roma, del quale punto essendo stata calcolata la posizione geografica per mezzo de' triangoli e della posizione astronomica di Napoli, si ottenne un'altra notabile verificazione de' nostri lavori, perchè la latitudine geodetica di S. Pietro fu trovata quasi identica a quella determinata dagli astronomi romani, e l'azimut calcolato risultò pure differente di pochi secondi dall' osservato. Più tardi gl' ingegneri austriaci distesero la triangolazione primaria dello Stato della Chiesa sino a contatto della nostra frontiera anche dalla parte di Roma: e sebbene per le nuove osservazioni dé' triangoli dell' alta Italia venisse modificato il primo confronto sul lato Civitella-Montepagano, non di meno il paragone esteso a tutti i lati di unione fece conoscere che le differenze su quei lati fra le misure del Fergola e le austriache derivavano principalmente dalla discordanza delle basi delle due triangolazioni ed (ammessa per buona la scala della triangolazione austriaca nelle vicinanze della frontiera) accennavano ad un difetto della base di Castelvolturno, la quale non potette esser misurata con istrumenti di ultima perfezione e con un campione di ben determinato valore.

Quì cade a proposito parlare dell' altezza della Cupola di S. Pietro che, determinata da Fergola, fu dal signor Colonnello *Caraboeuf* trovata alquanto diversa da quella più direttamente da lui misurata, e nella quale doveva aversi maggior fiducia; sfuggì però al chiarissimo ingegnere francese l'osservazione, che il Fergola non aveva ottenuta quell' altezza con distanze reciproche dallo zenit, onde dovendo affidarla ad una ipotesi sulla refrazione terrestre, per poco che il coefficiente di questa da 0,08 si abbassasse a 0,066, svaniva l'avvertita differenza. Dalle osservazioni fatte dopo nelle altre parti del Regno si è veduto che il valor medio di siffatto coefficiente, il quale nel nostro clima è molto variabile, può fissarsi a 0,07.

Conosciuta la valentia e la scrupolosità del nostro Fergola ne' lavori geodetici, si pensò di affidargli nuove e più importanti operazioni. Per maggiormente assicurare la triangolazione primaria del Regno s' immaginò di appoggiarla a due reti perpendicolari fra loro misurate con estrema cura, le quali come due assi coordinati abbracciassero nella loro rispettiva direzione tutta l'estensione del Regno; e per conseguire un doppio scopo, una delle reti doveva distendersi lungo un meridiano da *Termoli* a *Capo Passero*, e l'altra lungo un parallelo da *Ostuni* a *Ponza*. Per tal modo si sarebbero anche misurati un arco di meridiano ed un altro di parallelo, i quali avrebbero potuto contribuire al perfezionamento della scienza, che ha per oggetto di studiare l' esatta forma della Terra e determinarne la grandezza. Accettò Fergola l' onorevole, ma difficile e pesante carico, e non diffidava di condurlo egli solo a compimento. E l' effetto tra poco avrebbe risposto alle speranze, se così fosse piaciuto all'Eterno regolatore

del destino, poichè in pochi anni, il valoroso ed indefesso geografo aveva già estesa la triangolazione del parallelo da *Ostuni* sino a *Napoli*, e quella del meridiano da *Termoli* a *Stromboli*, distendendosi anche con altri triangoli non compiuti ad *Antennammare*; per modo che non rimanevano ad ultimare le due reti se non i triangoli fra *Napoli* e *Ponza* e gli altri fra *Antennammare* e *Capo Passero*. Per assicurare le operazioni geodetiche dovevano però misurarsi altre due basi, una nelle pianure di *Puglia*, l' altra in quelle di *Catania*, e dovevano pure eseguirsi le osservazioni astronomiche agli estremi de' due archi, onde determinare le ampiezze degli archi celesti. Tutto questo lavoro avrebbe potuto durare altri sei o sette anni al più, e l' infelice nostro collega negli ultimi giorni di sua vita vagheggiava il momento non lontano di por termine a tante fatiche, e conquistare con esse il diritto ad un onorato riposo.

Intanto la triangolazione del Regno congiunta con queste ultime operazioni a quella di Sicilia faceva conoscere l' esatta differenza di longitudine fra gli osservatorii di *Napoli* e di *Palermo*; e poichè l' unione della triangolazione di *Abruzzo* con i lavori dell' alta *Italia* aveva già posta, per così dire, la Specola di Napoli in comunicazione geodetica con quelle di *Roma*, di *Milano*, e di *Padova*, la longitudine assoluta di *Napoli* acquistò per questi confronti un nuovo grado di esattezza.

Non ultimo risultamento delle operazioni geodetiche eseguite dal capitano Fergola è la livellazione generale delle provincie di qua del *Faro*. I tre mari che le bagnano sono stati riuniti con linee di triangolazione, ed il livello delle acque medie di ciascun mare, direttamente osservato, si

è trovato differire solo di qualche palmo da quello dedotto dallo zero di un altro mare per mezzo della triangolazione.

Oltre alle misure geodetiche, il capitano Fergola ebbe occasione di eseguire anche più volte osservazioni astronomiche di latitudine, di longitudine e di azimut. Nel 1831 misurò la latitudine di *Sciacca*, e l'azimut del lato *Sciacca-Torre Mazzone*, ma il cattivo tempo gl'impedì di determinare la differenza di longitudine con le occultazioni di alcune stelle dietro la Luna in corrispondenza con Napoli. Nel 1843, avvicinandosi l'epoca di dover misurare l'ampiezza dell'arco di parallelo, si pensò di fare un saggio del metodo delle stelle filanti, perchè pareva difficile poter eseguire i segnali a polvere con lo scarso numero d'ingegneri addetti a' lavori geodetici; e quindi il Professore *Amante* in Napoli e Fergola in Termoli fecero le osservazioni corrispondenti ne' giorni 10, 11, 12, 13 agosto, ed ottennero quattordici coincidenze di stelle, le quali si accordarono in modo da poter dare la differenza di longitudine de' due luoghi con un error *medio* non maggiore di un decimo di secondo di tempo (1).

Darò fine a questo rapido quadro degl' importanti lavori geodetici del Fergola con accennare le sue specialissime disposizioni all' ufficio dell' ingegnere geografo. Aveva

(1) Quanto abbiamo detto de' lavori del Fergola basta a correggere lo sbaglio in cui è caduto il Presidente della Società geografica di Londra, il quale in uno de' suoi ragguagli annuali su i progressi della Geografia attribuisce agl' ingegneri austriaci la misura della porzione di arco di meridiano fra Termoli e Capopassero e l' altra dell' arco di parallelo tra Fasano e Napoli. È probabile che il lodato geografo sia stato tratto in errore dal sig. *Gräberg de Hemsö*, che nel riassumere una lettera del sig. Generale Visconti in cui si parlava de' lavori geodetici del Regno di Napoli, e di quelli de' tedeschi nell' alta Italia, non ha ben distinti gli uni dagli altri. Ciò che v' ha di certo è che, come gl' ingegneri napolitani non hanno lavorato fuori del Regno, così gli austriaci a questi ultimi tempi, non hanno lavorato nelle nostre provincie.

egli sortito dalla natura una fibra robustissima, e da poter resistere ad ogni genere di disagi; prolungare indefinitamente il travaglio ed il digiuno, vegliare le notti, o dormire poche ore sul nudo suolo in aperta campagna, nutrirsi, quando la necessità il comandava, di cibi grossolani, resistere all' imperioso bisogno della sete, erano cose queste che non alteravano la sua sanità, nè la tranquillità dell' animo suo. Ma la più rara e preziosa qualità fisica che egli si avesse per le osservazioni era l' acutezza e la forza della vista; un leggiero grado di miopia la guarentiva dal naturale deterioramento derivante dall' età, per modo che con gli anni e con l' uso, in vece di perdere aveva acquistata maggior forza. I quaderni delle sue osservazioni offrono singolari e numerosi esempi di oggetti di piccole dimensioni veduti a grandi distanze, e ne' quali spesso egli distingueva ed osservava diversi punti. Così del telegrafo di *Capri* osservò l' asta ed un angolo della casetta, della chiesa di *Lipari* il punto più alto ed uno spigolo della facciata, e della chiesa di *S. Giovanni in Laterano* di Roma disegnò il prospetto alla distanza di 42 miglia con tali particolari che si direbbe ritratto sul luogo; e tutto ciò con un cannocchiale di un piede e mezzo di fuoco, quantunque di *Fraunhofer*.

A compiere questo cenno biografico del nostro defunto collega, mi rimangono i particolari della sua vita privata. E quì, in conferma di quanto sono per dire, chiamo in testimonio chiunque di questo dotto consesso ebbe occasione di conoscere ed apprezzare le rare qualità di Francesco Fergola. È uso dei biografi l' attribuire indistintamente tutte le virtù a tutti coloro di cui imprendono a tessere l' elogio, il che discredita l' opera loro, ed offen-

dendo la verità, reca pure grave danno al pubblico costume; ma la verità non può se non rendere omaggio alle virtù del Fergola. Abbiamo veduto che dalla infanzia egli fu quasi il solo educatore di se medesimo; or chi lo ha conosciuto può affermare aver egli conservato verso se stesso quel nobile ufficio sino alla morte. Tutte le sue cure erano rivolte a perfezionarsi continuamente nel fisico, nel morale e nell' intellettuale. In quanto al fisico, egli erasi ingegnato di ridurre al minimo i suoi bisogni, e studiando il proprio temperamento, preveniva i mali con una severa igiene, o con abitudini salutari. Così, essendo egli facile a contrarre raffreddori, il che gli era qualche volta d'impaccio nell' esercizio de' suoi doveri, giunse a poco a poco a correggere quella difettosa disposizione con lavande quotidiane di acqua fredda in varie parti del corpo; e fu veduto con meraviglia de' suoi amici, affrontare nell'ultimo inverno il rigore della stagione senza le ordinarie difese. Rispetto al morale, nessuno era giudice più severo di lui delle sue azioni, ond' è che diffidando sempre di se stesso, calcolava freddamente il bene ed il male, e prendeva per guida costante del suo operare la sola giustizia. Il timore di offendere questa eterna norma regolatrice il rendeva circospetto ed indulgente verso gli altri per modo, che la sua moderazione riusciva qualche volta esagerata. Non si contentò il Fergola di coltivare i soli studi matematici, ma non trascurò i militari, ed ornò in particolar modo la sua mente di non comuni cognizioni filosofiche e letterarie, ad apprender le quali lo agevolò la conoscenza di più lingue straniere. Il suo sistema di perfezionamento lo rendeva seguace zelante del progresso; e tale era l' ordine ch' egli poneva nelle sue occupazioni, che trovava il tempo d'in-

formarsi, almeno per notizia, di ogni nuovo acquisto che facesse l'umano incivilimento.

Questo, chiarissimi colleghi, fu l'uomo di cui deploriamo la perdita. La sua modestia, e la immutabile avversità che lo accompagnò nel corso della vita fecero che il suo valore non fosse abbastanza conosciuto nè premiato. La sorte invidiò al Fergola sino il contento di veder condotte a termine le sue più importanti operazioni, per raccoglierne quel frutto di onore e di fama che il mondo incivilito suol tributare a simiglianti lavori. Nondimeno, segni della pubblica stima furono, il diploma di socio corrispondente conferitogli nel 1826 dalla Reale Accademia delle scienze di Napoli, quello di Socio corrispondente dell'Accademia di scienze e belle lettere di Palermo nel 1832, la nomina di Socio residente di questa nostra Accademia nel 1838, e l'onorificenza di Capitano accordatagli da S. M. nel 1840, quando l'ordine di antichità nell'esercito non lo chiamava ancora a godere di quel grado. L'Officio Topografico di Napoli ha perduto in lui uno de' suoi principali sostegni; le scienze sperimentali un operatore indefesso e coscienzioso; i suoi compagni il loro più costante amico. La sua morte è stata l'ultimo atto onorevole di una vita onoratissima; egli si sacrificò al suo dovere ed alla scienza; e se gli furono negate in quell'estremo punto le consolazioni che tutti hanno, dalla religione, dai parenti e dagli amici, in compenso il nome di lui sarà nella storia della scienza annoverato fra quelli di non pochi altri uomini generosi, i quali, spingendo addentro lo sguardo ne' segreti della natura, rimasero vittime del loro coraggio.

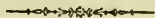
La guernigione militare di *Messina*, e tutta la po-

polazione di quella città furono sorprese e contristate del tragico fine del capitano Fergola, chè in poco tempo egli avevasi acquistata la stima e l' affezione dell' universale. Gli resero gli ultimi uffici due suoi compagni ed allievi, e fu sepolto nella chiesa di Porto Salvo, dove una lapide ricorderà il tristo caso e le virtù dell'estinto; ma la memoria di lui rimarrà sempre cara ed onorata nel R. Officio Topografico di Napoli, ed ispirerà ne' giovani ingegneri la costanza ed il sentimento dell' esattezza, senza il quale sussidio chi imprende lavori di Geodesia non può mai lusingarsi d' incontrare la verità.

RICERCHE ANALITICHE
SULLE
SUPERFICIE ANULARI
A CONO DIRETTORE
MEMORIA

letta all'Accademia nella tornata del 14 gennaio 1849

DAL SOCIO RESIDENTE

Vincenzo Antonio Rossi

Furono alcune considerazioni di architettura marittima, che fecermi rivolgere allo studio delle *Superficie Anulari*: e in prima ad investigare le forme e le proprietà principali della superficie secondo la quale io conchiudeva da quelle mie considerazioni, potersi conformare le parti inferiori dell'estremità dei moli sporgenti in mare. E per tali investigazioni mi si faceva manifesto, essere tal superficie tutta intera quella di un vero anello: ma diversa dall'altra dell'*anello sferico*, contemplata in molti trattati di geometria descrittiva; perchè quest'ultimo anello è di uniforme grossezza, mentre che l'altro è di grossezza prima crescente per una sua metà, e poi decrescente. Epperò diedi pure il nome di superficie anulare alla nuova superficie: e distesa una memoria intorno ad essa, la intitolai:

» Memoria intorno ad una superficie anulare secondo la » quale potrebbonsi conformare le estremità dei moli spor- » genti in mare ». Ed ebbi l'onore di presentarla a quest' Accademia a dì 14 luglio 1844: ora trovasi inserita nel volume V degli Atti.

In tale Memoria, investigando l'indole geometrica della superficie, mi avvidi non convenirle punto il nome di Anulare sol perchè il solido che racchiude è realmente un anello, e parimente non essere per la medesima ragione convenevole il nome di Anulare alla superficie dell'anello sferico, od anche del toro; perciocchè tanto l'una quanto l'altra *non sono per natura geometrica* simili ad anelli, ma il sono *soltanto per particolare grandezza di un loro parametro*: e mi avvidi ancora, delle due superficie, l'una essere un caso particolare dell'altra: ed in oltre che le soluzioni da me trovate del menare il piano tangente alla superficie particolare che formava oggetto delle mie investigazioni, ed anche le soluzioni di altri problemi, erano non solo eziandio applicabili alla superficie dell'anello sferico, ma ancora ad ogni superficie generata dal moversi comunque di una circonferenza di circolo di raggio comunque variabile od anche costante; e ciò misi in evidenza in diversi luoghi di quella mia Memoria, e massime ne' due Scolii all'ultima Proposizione.

Fu per tutte cosiffatte ragioni, che allora per la prima volta ardii usare la parola di *Anulare* in assai più ampia accettazione. Dissi Superficie Anulare, *non la superficie conformata a guisa di anello*, *ma ogni superficie generata dal muoversi comunque di una circonferenza di circolo, e di raggio comunque variabile, od anche costante.* Nè sembrami essere sconvenevole; perocchè io imitava in

ciò i celebri geometri Monge ed Hachette. Questi chiamarono *Rigata* ogni superficie generata da linea retta, sol perchè il taglio di una riga potrebbe per tutta la sua lunghezza applicarsi sulla superficie per qualunque suo punto si facesse passare: io credetti poter chiamare *Anulata*, o più italianamente *Anulare* ogni superficie generata da una circonferenza di circolo, sol perchè la concavità circolare di un anello potrebbe sempre per tutta la sua lunghezza applicarvisi, per qualunque suo punto si facesse passare.

E quindi, prendendo la denominazione di superficie Anulari in tale generalissima accettazione, la genesi di tutt' esse attentamente esaminai, ne dedussi spontanea la loro geometrica classificazione in undici *grandi classi*, e novellamente vidi, potersi ad esse tutte applicare i metodi di soluzione da me trovati, dei principali problemi geometrici per l'anulare particolare ch' era stato oggetto della detta mia Memoria.

Tutte cosiffatte cose, essendo nuove per la scienza, e potendosi avere, formare esse stesse quasi una novella teorica geometrica, e di una innumerevole serie di superficie, non mai prese in considerazione in tutta l'universalità loro, credetti dover tornare utile il renderle note; e scrissi però nello stesso anno 1844 un Articolo, col titolo di « Generalità geometriche sulle superficie Anulari »: ed il feci inserire nel fascicolo di settembre di quell'anno, del giornale napolitano il Museo.

In quell'articolo, io toglieva dall'architettura esempî parecchi, per mostrare come superficie anulari sono già assai bellamente ed opportunissimamente impiegate nelle arti: mostrava, come le *superficie canali* del Monge sono

superficie anulari particolari: ragionava della classificazione loro in undici grandi classi: dimostrava, come tutte le anulari sono inviluppo di superficie rigate: e dava le generalissime soluzioni dei due più importanti problemi; cioè del menare il piano tangente alla superficie anulare generalissima per un punto dato su di essa, o per una retta data fuori.

Com'è chiaro, ciò avrebbe potuto dar luogo a molte altre geometriche investigazioni; ed anche più a moltissime applicazioni: potrebbesi dire a diversi trattati grafici speciali, o ricerche intorno alle varie sorte di anulari, che già trovano le applicazioni loro nelle arti, o che potrebbero esservi applicate. Ma pensai che l'occuparmi della ricerca delle *espressioni analitiche generalissime* di ciascuna delle undici classi di anulari, ed anche di certe altre superficie e linee con esse connesse, come a dire delle inviluppate loro rigate, delle loro caratteristiche, e delle rigate ad elementi normali a quelli della inviluppata, avrebbe potuto tornare ad utile non solo della scienza, e per le verità che se ne sarebbero rese manifeste e perchè in un campo non ancora esplorato; ma anche più delle arti. Perciocchè, dopo i solidi terminati da superficie rigate, essendo i più facili a costruirsi dagli artefici quelli terminati da superficie generate da circonferenze di circolo, ovvero da archi circolari, potrebbe abbisognare la misura numerica dei volumi e delle aree di questi solidi, e dei pezzi componenti ciascuno di essi; e la conoscenza delle dette espressioni avrebbe aperta la strada alla determinazione dell'equazioni delle superficie limiti dei pezzi componenti il solido intero impiegato o da impiegarsi nelle arti, ed anche delle linee limiti di esse superficie: le quali equa-

zioni sono indispensabili al calcolo numerico dei volumi di quei solidi, e delle aree delle loro superficie.

Di quì l'origine delle mie Ricerche Analitiche sulle superficie anulari. L'argomento non fu di predilezione, ma si presentò per avventura; il lavoro non intrapreso per desio di gloria, ma per solo amore verso la scienza e pel bene che potrebbe provenirne alle arti.

Avendo fatte inserire quelle generalità geometriche nel giornale il Museo, come ho detto, pensai nel giornale medesimo inserire una serie di articoli, in ciascuno dei quali aveva in mente esporre le mie ricerche a mano a mano. E così nell'anno 1845, pubblicai in quel giornale tre articoli sul soggetto medesimo. Nel primo io esponeva le mie ricerche » sulle Anulari di Prima Classe » in generale; nel secondo quelle « su certe Anulari particolari di prima classe », come applicazioni delle cose contemplate nel precedente articolo; e nel terzo quelle « sulle Anulari di Seconda Classe ». Ma tosto dovetti accorgermi non essere quei miei articoli adattati all'indole di quel giornale; non solo per la natura propria della materia, ma anche più pel sesto del libro. Però sospesi le mie pubblicazioni. E stimai più convenevole presentare a questa dotta Accademia, di cui ho l'onore di far parte, le ulteriori mie ricerche sul soggetto.

Ma in quel frattempo aveva luogo in Napoli la settima adunanza degli Scienziati Italiani: ed a me parve quella bella opportunità per sentire le opinioni dei matematici quì convenuti, intorno al soggetto delle mie investigazioni; e in ispezialità intorno al nome da me dato alla universalità delle superficie generate dal muoversi comunque di una circonferenza di circolo di raggio costante o variabile, ed anche intorno alle considerazioni geometriche,

sulle quali io fondava la classificazione di tutt'esse in undici grandi classi. Epperò comunicai alla Sezione un sunto delle mie investigazioni sul soggetto, fino a quel tempo fatte. E la benevola ed applaudente accoglienza fatta a quelle mie idee e conclusioni, mi lusingò molto; e fu cagione che mi fossi risoluto a continuare, secondo il proponimento mio, ed anche con maggiore alacrità, nelle mie ricerche sulle Anulari. Per lo che nel corso dell'anno 1846 presentai a quest'Accademia tre miei ordinati lavori sul soggetto: cioè 1.° una Memoria « intorno ad alcune superficie Anulari particolari di Seconda Classe », nella quale, come applicazione delle cose contenute nell'ultima delle precedenti pubblicazioni, io trattava coll'analisi della superficie medesima secondo la quale potrebbonsi conformare le parti inferiori dell'estremità dei moli sporgenti in mare, ed anche della superficie dell'intradosso della *volta a botte anulare*; e vi mostrava come entrambe sono casi particolari di un'anulare più generale, che oltre a quei due, altri quattro casi particolari comprende: 2.° una Nota « sulle Inviluppate Rigate delle anulari di prima e » seconda Classe in generale »: 3.° una Memoria « sulle » Anulari di Terza Classe ». E poi nel 1847 un'altra Nota relativa ad una rimarchevole conchiusione, cui era condotto da ulteriori mie ricerche sul soggetto.

E compite, secondo il piano prefissomi, le mie ricerche sulle anulari delle tre prime classi, avrei dovuto, secondo l'ordine di classificazione, occuparmi delle Anulari di Quarta Classe; ma piacquemi spingermi più oltre, e passare invece alle Analuri di Quinta Classe.

Movendosi la circonferenza mobile, il suo piano parimenti si muove; e può bene avvenire che un tal piano

in tutte le posizioni sue successive, vada a passare sempre per un solo e medesimo punto. Ciò avvenendo, le rette intersezioni delle successive posizioni del piano costituiscono un cono: e cono che può aversi, come dirigente il movimento del piano della circonferenza; perciocchè, per la genesi di esso cono, un tal piano gli gira intorno toccandolo sempre. Ed il quale però dissi, in quelle mie generalità, « Cono Direttore dell'Anulare ». Se sul piano tangente al cono direttore stia la circonferenza generatrice dell'anulare, e con essa la retta ad essa tangente e ad un tempo normale al lato di contatto del piano col cono, è chiaro che movendosi il piano intorno al cono direttore, sempre toccandolo, e con esso la circonferenza generatrice dell'anulare colla detta retta ad essa tangente, mentre la circonferenza genera l'anulare, questa retta genera una superficie rigata. Ed in quelle mie generalità è dimostrato, come una tale rigata può risultare o *non sviluppabile, o sviluppabile a lato di regresso*, *od anche sviluppabile conica*; e che le rette di una tal rigata determinano sempre, sul piano mobile tangente al cono, la posizione della circonferenza generatrice; per lo che la dissi « Rigata Determinatrice dell'Anulare ». E di quì è che le Anulari a Cono Direttore van messe in tre classi diverse, secondo che la rigata determinatrice è non sviluppabile, o sviluppabile a lato di regresso, o sviluppabile conica: e le quali dissi però, in quelle mie generalità, di Quinta, Sesta, e Settima classe. Essendomi determinato dunque passare a ricerche relative alle Anulari di quinta classe, avrei dovuto occuparmi delle Anulari a Cono Direttore e Rigata Determinatrice non sviluppabile. Ma poichè intorno ad un medesimo cono direttore potrebbero immaginarsi esistere anu-

lari diverse, di quinta non solo, ma anche di sesta e settima classe; tanto solo, che le loro rigate determinatrici fossero rispettivamente o non sviluppabili, od a lato di regresso, o coniche; era facile concepire, che queste tre classi di superficie nella loro trattazione analitica, ossia nelle ricerche ad esse relative, avrebbero dovuto offrire certi fatti analitici, o proprietà comuni, per le quali, ricercate certe formole od anche espressioni più generali, avrebbonsene potute dedurre certe altre più particolari, e però pertinenti in particolare ed esclusivamente a ciascuna delle tre classi di anulari a cono direttore. E ciò io ben concepii: e tanto più, in quanto che io avea di fatto nelle mie precedenti ricerche già scorto esistere fatti analitici comuni o proprietà comuni tra le due classi di « Anulari a Retta Direttrice », cioè tra quelle di prima e seconda classe; ed anche tra quelle a « Cilindro Direttore », cioè tra quelle di terza e di quarta classe.

Però io mi persuasi che avrei potuto abbreviare di molto il mio cammino, avviandomi ad un tempo ad investigazioni o ricerche comuni a tutte tre le classi di Anulari a Cono Direttore: e veduta la multiplicità dei movimenti da dover abbracciare, epperò la vastità e difficoltà, o se non questa, la lunghezza dei calcoli nei quali avrei dovuto incontrarmi, mi determinai di procedere appunto per strada comune verso le ricerche relative alle anulari di ciascuna classe delle tre a cono direttore; e quindi, ov'essa naturalmente sarebbesi partita in tre, percorrerne ciascuna di queste. E così mi risolvetti di fare. Ma ciò dovea togliermi l'opportunità di poter staccare le mie ricerche, e così poterle a Voi, Chiarissimi Colleghi, presentare a misura che per esse avrei proceduto: tale legame

le unisce insieme, tale concatenamento di ragionamenti e di calcoli, che mi sembrò impossibile, od al certo sconvenevole il comunicarvi anche i parziali risultamenti di queste mie ricerche. E questa è stata cagione principalissima, per cui per più mesi non v'ho reso conto delle nuove investigazioni da me fatte sul soggetto: comunque pur altre ve ne siano state, che me ne hanno distratto.

Ma compito, secondo il mio piano, il lavoro, ed ordinate le fatte ricerche in una Memoria, ecco che nuove difficoltà mi si presentavano per comunicarvele in maniera analoga a quella tenuta nel presentarvi le precedenti. La natura dell'opera, me ne rende impossibile quì la lettura; la sua mole, di necessità cresciuta più che non avrei creduto, renderebbe pur troppo lunga la lettura anche di un suo estratto: e quando anche fosse possibile, come stimo non sia, il ridursi questo tra assai stretti termini, forse penoso sarebbe l'ascoltarlo.

Egli è per tutte cosiffatte ragioni, o Signori, che ho stimato meglio fare un Sommario della Memoria stessa; e ridottolo al meno possibile e fattolo stampare, presentarne un esemplare a ciascuno di voi, affine che possiate leggerlo e considerarlo con vostro miglior commodo, e direi anche con miglior frutto: e potrete così non solo prender ragione delle principali verità investigate, ma anche del metodo, dell'ordine delle ricerche e della esposizione loro. E mi sono a ciò determinato per altro motivo ancora. Ed è, che essendo sempre importante in geometria il conoscere le nuove verità investigate, per le conseguenze od applicazioni che potrebbonsene fare o trarre; ed anche perchè possono all'occorrenza rendere più facili o più spediti altri lavori geometrici, comunque di argomento

diverso; tengo mio debito render palese a tutti gli studiosi della scienza quel poco di nuovo che ho investigato in queste altre mie ricerche: e ciò non avrei potuto altrimenti fare, che pubblicando il detto Sommario; perciocchè il dare alle stampe la Memoria intera sarebbe spesa che, almeno per ora, non sono al caso di sostenere; e d'altronde quando anche piacesse alle Signorie Loro farla inserire negli Atti, ben molto tempo dovrebbe scorrere prima della pubblicazione sua, sendo che già sono parecchi altri dottissimi lavori ed importantissimi da stampare innanzi.

Voglio avere speranza dunque, che sarete per accettare benevoli la offerta che fo a ciascuno di Voi, di un esemplare del detto Sommario: e che ad un tempo vorrete non disapprovare nello scopo il divisamento mio, di averlo fatto stampare. E se sarà avverata la speranza mia, continuerò coll'ajuto di Dio Onnipotente, ed invogliato dall'incoraggiamento Vostro nella impresa di spingere innanzi le mie ricerche sulle altre classi di superficie Anulari, per fine di abbracciare l'universalità tutta delle superficie generate comunque da circonferenze di circolo, e le quali dissi tutte Anulari.

CAPO PRIMO

DELLE ANULARI A CONO DIRETTORE IN GENERALE.

1. Una circonferenza mobile variabile o costante di grandezza genera un'*Anulare* : e tutte le successive intersezioni del piano della circonferenza mobile costituiscono una superficie sviluppabile , che è la *Superficie Direttrice* dell' anulare. E se tutte le intersezioni successive del piano della circonferenza mobile passano per un solo e medesimo punto, la superficie direttrice sarà un cono: e tutte le anulari , che possono per un tal movimento del piano della circonferenza mobile generarsi , sono a *Cono Direttore.* Ed il piano della circonferenza mobile in ogni sua posizione tocca sempre esso *cono direttore* : e lo tocca secondo un suo lato.

Consideriamo una individuata posizione della circonferenza mobile. Pel centro di questa immaginiamo menata una retta parallela al lato di contatto del suo piano col cono direttore ; e pel punto più lontano dal vertice del cono, ove essa parallela taglia la circonferenza in quella sua individuata posizione , intendiamo menata una retta perpendicolare al lato di contatto del piano di essa circonferenza col cono direttore. E questa retta perpendicolare esista sempre , durante il movimento della circonferenza mobile : così essendo , mentre questa genera l' anulare , essa retta perpendicolare genera una superficie rigata , che è *Rigata Determinatrice* dell' anulare.

Ora due posizioni consecutive di questa retta, che genera la *Rigata Determinatrice*, potranno non stare in un medesimo piano; o potranno stare in un medesimo piano, senza passare tutte per un medesimo punto; o potranno tutte passare per un medesimo punto. Nel 1.° caso la rigata determinatrice sarà *non sviluppabile*: nel 2.° caso sarà *sviluppabile a lato di regresso*: nel 3.° caso sarà *sviluppabile conica*. Le anulari a Cono Direttore adunque comprendono quelle di *quinta*, *sesta e settima classe* (*).

2. Il piano di una individuata circonferenza dell' anulare tocca il cono direttore di questa; e tiene sur esso la circonferenza mobile medesima in quella sua individuata posizione, ed una retta della superficie determinatrice dell' anulare; la quale, mentre tocca la individuata circonferenza, debbe inoltre essere perpendicolare al lato di contatto del cono direttore col piano della individuata circonferenza che lo tocca. E di questa sola condizione, cui debbe soddisfare la retta della determinatrice, tenendo conto, verremo a considerare in comune le anulari di tutte le tre classi a cono direttore. Se porremo inoltre che essa retta della determinatrice, e tutte le altre di essa, non passano per un medesimo punto, nè tutte toccano una medesima curva, ma solo l' incontrano, considereremo solo le anulari di Quinta Classe. Se invece porremo che non solo tutte incontrano una medesima curva, ma che la toccano ancora, senza passare tutte per un medesimo punto, considereremo solo le anulari di Sesta Classe. E se porremo in fine che tutte passino per un solo e medesimo punto, considereremo solo le anulari di Settima Classe.

E volendo ora occuparci delle anulari a Cono Direttore, cioè di Quinta, Sesta, e Settima classe, in grazia di brevità, e per evitare ripetizioni, cominceremo dal non tener conto di nessuna di queste tre ultime condizioni: e sarà così che gitteremo le fondamenta di queste nostre ricerche. Senza tener conto di nissuna di esse tre condizioni, cercheremo le espressioni analitiche,

(*) Veggansi le mie *Generalità Geometriche sulle superficie Anulari*, pubblicate nel Giornale Napoletano il Museo 1844, ed il primo fascicolo delle mie *Ricerche Analitiche sulle superficie Anulari* pubblicato nel 1846.— Napoli.

1.° di una circonferenza generatrice individuata qualunque dell' anulare :

2.° di quel punto di essa circonferenza che appartiene ad una individuata caratteristica dell' anulare :

3.° di una individuata retta della inviluppata rigata all' anulare, che tocca essa circonferenza in quel suo punto che appartiene ad essa individuata caratteristica.

4.° di una individuata retta della rigata a generatrice normale a quella della inviluppata, la quale passa per quello stesso punto di essa caratteristica individuata medesima.

E per tal modo esse espressioni apparterranno in comune a tutte le tre classi di anulari a cono direttore : ed in comune apparterranno ad esse insieme i ragionamenti che faremo, e le verità che appureremo.

Introdurremo di poi, una dopo l'altra, le tre condizioni anzidette, che debbono avverarsi, perchè le rette della rigata determinatrice appartengano ad una rigata non sviluppabile, o ad una rigata sviluppabile a lato di regresso, o ad un cono. E troveremo le espressioni analitiche relative

1.° alle anulari di *Quinta Classe.*

2.° alle anulari di *Sesta Classe.*

3.° alle anulari di *Settima Classe.*

E verremo a conoscere ad un tempo le condizioni analitiche necessarie, perchè l' anulare a cono direttore appartenga a ciascuna di esse classi : e le verità che appureremo dipoi apparterranno alle anulari di ciascuna di esse classi.

ARTICOLO I.

Espressione della Circonferenza Generatrice.

I.

3. Assumiamo il vertice del cono direttore per origine di tre assi ortogonali delle coordinate x, y, z.

E siano

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} y=f(x) \\ z=f_1(x) \end{cases}$$

le equazioni della curva direttrice del cono.

Un punto individuato di questa curva, corrispondente alla ascissa $x=\beta$, avrà per coordinate

$$\beta, f(\beta), f_1(\beta).$$

Ed una retta che passa per questo punto, e per la origine delle coordinate, avrà per equazioni, come è facile persuadersi, le due

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \beta y - fx=0 \\ \beta z - f_1 x=0 \end{cases}$$

E questa è la espressione di quell' individuato lato del cono direttore, il quale passa per l' individuato punto della sua curva direttrice di equazioni (I), il quale ha per ascissa β.

4. Su questa retta assumiamo un punto alto sul piano coordinato xy per ω. Questo punto, stando sur una tal retta, di equazioni (II), l' ordinata $z=\omega$ debbe soddisfarle. Quindi le tre coordinate del punto medesimo sono

$$\frac{\beta\omega}{f_1};\ \frac{f\omega}{f_1};\ \omega.$$

Pel punto di queste tre coordinate, conduciamo un piano normale alla retta sulla quale esso punto giace, cioè all' individuato lato del cono che è espresso dalle equazioni (II).

È noto che le tracce di questo piano debbono essere perpendicolari alle projezioni di essa retta, individuato lato del cono. Te-

nendo dunque opportunamente conto delle relazioni che esistono tra le tangenti degli angoli che cogli assi coordinati fanno le tracce di un piano e le projezioni di una retta, e tenendo conto ancora che il piano suddetto passa pel punto delle tre precedenti coordinate; ottenghiamo per equazione del detto piano normale all' individuato lato del cono la

$$\text{(III)} \qquad f_1(\beta x+fy+f_1 z)-(\beta^2+f^2+f_1^2)\omega=0:$$

ed è manifesto (1) che su questo piano debbe indubitatamente trovarsi quella individuata retta della rigata determinatrice, che taglierebbe il lato del cono nel suo individuato punto di ordinata ω.

II.

5. Abbiasi un altro punto nello spazio, delle coordinate

$$p\,,\ q\,,\ r.$$

E per questo punto conduciamo in primo una retta parallela all' individuato lato del cono direttore, che è espresso dalle equazioni (II). Le sue equazioni sono

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \beta(y-q)-f\,(x-p)=0 \\ \beta(z-r)-f_1(x-p)=0 \end{cases}$$

6. E pel punto istesso conduciamo un piano parallelo a quello menato per l' individuato punto di ordinata ω, e sul quale abbiam detto (4) dover stare quella individuata retta della rigata determinatrice, che passa per esso medesimo punto di ordinata ω: cioè pel punto delle coordinate p, q, r, conduciamo un piano parallelo a quello della equazione (III). La sua equazione è

$$\text{(V)} \qquad \beta(x-p)+f(y-q)+f_1(z-r)=0.$$

E questo piano sarà parimente normale alla individuata retta del cono direttore, espressa dalle equazioni (II): e però la incontra.

7. Calcoliamo dunque le coordinate del loro punto d' incontro; lo che facciamo trattando simultaneamente le equazioni (II) e (V),

e risolvendole rispetto ad x, y, z. La quale risoluzione riesce spedita cominciando dal calcolare i valori $y-q$, e $z-r$ dalle due prime e sostituendoli nella terza. Così operando ottenghiamo per le coordinate dell' incontro del piano menato pel punto p, q, r, coll'individuato lato del cono, al quale esso piano è normale, le tre

$$p-\beta\left(\frac{p}{\beta}-\frac{\beta p+fq+f_1 r}{\beta^2+f^2+f_1^2}\right)$$
$$q-f\left(\frac{q}{f}-\frac{\beta p+fq+f_1 r}{\beta^2+f^2+f_1^2}\right)$$
$$r-f_1\left(\frac{r}{f}-\frac{\beta p+fq+f_1 r}{\beta^2+f^2+f_1^2}\right)$$

8. La retta menata pel punto p, q, r, parallela all' individuato lato del cono (5), debbe incontrare il piano a questo normale che passa pel suo punto di ordinata ω (4). Calcoliamo le coordinate del loro punto d' incontro. La qual cosa dobbiamo fare trattando simultaneamente le loro equazioni, cioè la (III) e le (IV), e risolvendole rispetto ad x, y, z. E ciò facciamo speditamente, cominciando dal trovare i valori di y e z dalle (IV), sostituendoli nella (III); e quindi aggiungendo e sottraendo ad un tempo al termine noto di questa la quantità βp. Ottenghiamo per le coordinate dell' incontro, di che si tratta

$$p+\beta\left(\frac{\omega}{f_1}-\frac{\beta p+fq+f_1 r}{\beta^2+f^2+f_1^2}\right)$$
$$q+f\left(\frac{\omega}{f_1}-\frac{\beta p+fq+f_1 r}{\beta^2+f^2+f_1^2}\right)$$
$$r+f_1\left(\frac{\omega}{f_1}-\frac{\beta p+fq+f_1 r}{\beta^2+f^2+f_1^2}\right).$$

9. Se faremo i quadrati dei secondi termini delle tre prime calcolate coordinate (7), li sommeremo, e poi ne estrarremo la radice quadrata, otterremo la distanza del punto nello spazio delle coordinate p, q, r, dall' individuato lato del cono direttore (3), il quale passa pel punto della sua direttrice di ascissa β; perciocchè essa radice esprime appunto la lunghezza della perpendicolare calata da quel punto sur esso lato del cono, stando il piede di una

tal perpendicolare per lo appunto nello incontro del piano menato pel punto p, q, r normale ad esso lato, col lato stesso. E parimenti se faremo i quadrati dei secondi termini delle tre ultime coordinate (8), li addizioneremo, e poi dalla somma ne estrarremo la radice quadrata, otterremo la distanza di esso medesimo punto nello spazio delle coordinate p, q, r, dal piano menato normale al lato del cono (4) per quel suo individuato punto, la di cui ordinata è ω; perciocchè il punto d' incontro della retta delle equazioni (IV) col piano della equazione (III), è per lo appunto il piede della perpendicolare calata su questo piano dal punto delle coordinate p,q,r.

Indichiamo con δ la prima di queste distanze, cioè la distanza del punto p, q, r dallo individuato lato del cono; e con α la seconda, cioè la distanza del punto medesimo dal piano ad esso individuato lato del cono normale, e menato pel suo punto di ordinata ω. Fatti i calcoli e le riduzioni, che per la seconda distanza riescono speditissime a causa del fattore comune a tutt' i termini da elevarsi a quadrato, e per la prima ancora, risultando i doppii prodotti con un fattore comune, onde poi la loro somma riesce il doppio della somma dei quadrati dei secondi termini; ottenghiamo in fine per esse distanze.

$$\text{(VI)} \qquad \delta = \sqrt{\left(p^2+q^2+r^2-\frac{(\beta p+fq+f_1 r)^2}{\beta^2+f^2+f_1^2}\right)}$$

$$\text{(VII)} \qquad \alpha = \left(\frac{\omega}{f_1}-\frac{\beta p+fq+f_1 r}{\beta^2+f^2+f_1^2}\right)\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}.$$

E quì è utile rammentarci che in queste espressioni $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$ sono le coordinate di un punto della curva direttrice del cono direttore, pel quale punto passa l' individuato lato di esso cono direttore (3), sul quale giace il punto (4) di ordinata ω; p, q, r sono le tre coordinate di un punto nello spazio (5); δ la distanza di questo punto da esso individuato lato del cono direttore; ed α la distanza di esso medesimo punto dal piano menato pel punto di ordinata ω di esso lato e normale al lato medesimo, sul quale piano debbe stare quella individuata retta della rigata determinatrice (4), che passerebbe per esso punto di ordinata ω.

III.

10. Per la retta delle equazioni (II)

$$\begin{cases} \beta y - fx = 0 \\ \beta z - f_1 x = 0 \end{cases}$$

che rappresentano l' individuato lato del cono direttore (3), conduciamo un piano a questo tangente. Un tal piano deve passare per la origine delle coordinate, e deve toccare la curva direttrice del cono nel punto per ove passa essa individuata retta. E però avrà un contatto di prim' ordine con questa curva nel punto delle coordinate

$$\beta\,,\,f(\beta)\,,\,f_1(\beta)$$

e passerà per la origine delle coordinate. Dunque essendo (3)

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f_1(x) \end{cases}$$

le equazioni della curva direttrice del cono direttore, il piano tangente suddetto ha per equazione

(VIII) $$(\beta f_1' - f' f_1)x + (f_1 - \beta f_1')y - (f - \beta f')z = 0$$

facile a trovarsi, per le note proprietà emergenti dalla teorica dei contatti.

11. Ora supponiamo che quel punto delle coordinate p, q, r, (5), non sia un punto qualunque dello spazio, ma sia un punto del piano della precedente equazione (VIII) avrà luogo ancora la equazione

(IX) $$(\beta f_1' - f' f_1)p + (f_1 - \beta f_1')q - (f - \beta f')r = 0.$$

E supponiamo di più, che esso punto delle coordinate p, q, r, sia inoltre il centro di una individuata circonferenza generatrice di un' anulare, avente quel cono di curva direttrice

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f_1(x) \end{cases}$$

per cono direttore, e della quale circonferenza il raggio sia α.

Così essendo, la intersezione del piano della equazione (VIII), piano tangente, col piano della equazione (III), piano normale allo individuato lato del cono (ora lato di contatto) menato pel punto di ordinata ϖ di esso lato, è la retta della rigata determinatrice (4). Onde sono δ, α le distanze del centro della individuata circonferenza, rispettivamente dal lato di contatto del suo piano col cono direttore, e dalla retta sul suo piano della rigata determinatrice. Onde, se queste quantità δ, α fossero note, avremmo modo di trovare le coordinate p, q, r del centro di una individuata circonferenza generatrice dell'anulare, il piano della quale

1.° tocca il cono direttore dell'anulare secondo un suo lato distante da esso centro per δ, e che passa pel punto di ascissa β della curva direttrice di esso cono:

2.° taglia la rigata determinatrice dell'anulare secondo una retta distante da esso centro per α, e la quale mentre è normale al lato del contatto passa pel punto di ordinata ϖ di questo lato.

E di fatto abbiamo tre relazioni (VI), (VII), (IX) dalle quali possono cavarsi i valori delle coordinate p, q, r.

E per cavarneli di fatto trattasi di risolvere rispetto a p, q, r, le tre equazioni seguenti

$$\beta p+fq+f_1 r-\sqrt{(p^2+q^2+r^2-\delta^2)}\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}=0$$
$$f_1(\beta p+fq+f_1 r)-(\varpi\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}-f_1 x)\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}=0$$
$$(ff_1'-f'f_1)p+(f_1-\beta f_1')q-(f-\beta f')r=0$$

Le quali sono equivalenti alle sopraenunciate relazioni: ottenendosi la prima equazione col liberare da denominatore la relazione (VI), elevando al quadrato ciascun suo membro, isolandone il termine $(\beta p+fq+f_1 r)^2$, e poi riducendo ad un membro la equazione, dopo averne di nuovo estratta la radice da ciascuno; ed ottenendosi la seconda col liberare dal denominatore la espressione (VII), e parimenti riducendo ad un membro la equazione.

12. La risoluzione di queste tre ultime equazioni rispetto a p, q, r, sembra non dover essere molto facile e spedita, a cagione della somma dei loro quadrati, che giace affetta dal radicale nella prima equazione. Ma potremo liberarnela moltiplicandola per f_1, e

quindi invece del suo primo termine $f_1(\beta p+fq+f_1r)$ ponendovi $(\omega\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}-f_1\alpha)\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}$, suo valore dato dalla seconda. E però per brevità di scrittura, ponendo invece di $\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}$ la distanza D ch' essa rappresenta, ed invece del binomio $\frac{\omega D}{f_1}-\alpha$, l' altra distanza Δ; abbiamo in ultimo da dover risolvere rispetto a p, q, r, le tre equazioni

$$
\text{(X)}\qquad
\begin{aligned}
&p^2+q^2+r^2=\delta^2+\Delta^2\\
&\beta p+fq+f_1r=D\Delta\\
&(ff_1'-f'f_1)p+(f_1-\beta f_1')q-(f-\beta f')r=0.
\end{aligned}
$$

Abbiamo detto distanza D, perchè $\sqrt{(\beta^2+f^2(\beta)+f_1^2(\beta))}$ rappresenta per lo appunto la distanza del punto della curva direttrice del cono direttore dell' ascissa $x=\beta$ dal suo vertice (3); ed abbiamo detto distanza Δ, perchè, come non è difficile persuadersi, $\frac{\omega D}{f_1}$ è la distanza, dal vertice stesso del cono direttore', del punto di ordinata $z=\omega$, di quel suo lato, che passa pel punto di ascisse $x=\beta$ della sua curva direttrice; e quindi $\frac{\omega D}{f_1}-\alpha$ esprime la distanza dal vertice del cono, del punto di esso lato, ove và a cadere il piede della perpendicolare, che misura la distanza δ (9): e coerentemente ha luogo la prima delle tre sopranotate equazioni; nella quale il primo membro esprime il quadrato di una ipotenusa, per la quale δ e Δ sono i cateti corrispondenti.

E la seconda di esse equazioni esprime una proprietà comune all' universalità delle superficie anulari: ed è il seguente

Teorema. *Pel vertice del cono direttore dell' anulare s' intendano menati tre piani ortogonali: la somma dei tre rettangoli formati colle distanze omologhe, da ciascuno di essi piani, del centro di una individuata circonferenza qualunque dell' anulare, e di un punto qualunque del lato del cono, secondo il quale il piano di essa circonferenza lo tocca, è uguale al rettangolo formato colla distanza, di questo stesso punto qualunque del lato del cono dal suo vertice, coll' altra, dal vertice stesso, del piede della perpendi-*

colare calata dal centro di essa circonferenza sul lato medesimo del cono, secondo il quale il piano di essa circonferenza lo tocca.

Di fatto p, q, r, sono le distanze del centro della circonferenza dai detti piani ortogonali (11); e $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$, le tre distanze di un punto qualunque del lato di contatto del cono direttore col piano di essa circonferenza dai tre piani medesimi; perciocchè ogni curva tracciata sul cono può esserne sua curva direttrice, e $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$ sono per lo appunto (3) le distanze da essi piani del punto, ove il detto lato di contatto del cono incontra la curva direttrice.

IV.

13. Pertanto dobbiamo risolvere rispetto a p, q, r, le tre equazioni (X)

$$p^2+q^2+r^2=\delta^2+\Delta^2$$
$$\beta p+fq+f_1 r=D\Delta$$
$$(ff_1'-f'f_1)p+(f_1-\beta f_1')q-(f-\beta f')r=0$$

Cominciamo dall' eliminare tra la seconda e la terza, prima r, e poi q. Otteughiamo le due

$$(f_1(f_1-\beta f_1')+f(f-\beta f'))\,q=D\Delta(f-\beta f')-((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)\,p$$

$$((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)\,r=D\Delta(f_1-\beta f_1')+((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta)\,p$$

Moltiplichiamo la prima delle tre precedenti equazioni (X) per $((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)^2$; e tra la risultante e le due ultime eliminiamo q ed r: lo che è facile, bastando porre in vece del secondo e terzo termine di essa risultante il quadrato del secondo membro di ciascuna di queste due ultime scritte. Otteughiamo così una equazione che contiene la sola p, ed è la

(XI)

$$\begin{aligned}&\Big\{((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)^2+((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)^2+((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta)^2\Big\}p^2\\ &\quad-2D\Delta\Big\{(f-\beta f')((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)-(f_1-\beta f_1')((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta)\Big\}p\\ &\quad+\Delta^2\Big\{D^2((f_1-\beta f_1')^2+(f-\beta f')^2)-((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)^2\Big\}\\ &\quad=\delta^2((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)^2\end{aligned}$$

*

Ora con qualche trasformazione il primo membro di questa equazione può molto semplificarsi, riducendolo ad essere tutto divisibile pel trinomio

$$(ff_1'-f'f_1)^2+(f_1-\beta f_1')^2+(f-\beta f')^2\ ;$$

ed anche ad un quadrato perfetto: e la equazione può abbassarsi al primo grado.

Per ciò fare ricordiamoci (11) che

$$(ff_1'-f'f_1)p+(f_1-\beta f_1')q-(f-\beta f')r=0\ ,$$

terza delle equazioni (X), esprime che il punto delle coordinate p, q, r, giace sul piano tangente al cono direttore (11), il quale tocca la curva direttrice delle equazioni (I) nel punto delle coordinate $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$.

E ne conchiuderemo che la equazione

$$\text{(XII)}\qquad (ff_1'-f'f_1)\beta+(f_1-\beta f_1')f-(f-\beta f')f_1=0$$

debbe avverarsi: e quindi del pari tutte quelle che possono dedursi da questa.

Ciò posto nella (XI) facciamo in primo i *quadrati accennati* dei tre binomii che costituiscono il coefficiente di p^2; ed otterremo sei termini al quadrato che possono ridursi a tre, ed i doppii prodotti dei termini che costituiscono ciascun binomio che possono ridursi ai tre termini seguenti

$$(ff_1'-f'f_1)\beta\times-\big((f_1-\beta f_1')f-(f-\beta f')f_1\big)$$

$$(f_1-\beta f_1')f\times-\big((ff_1'-f'f_1)\beta-(f-\beta f')f_1\big)$$

$$(f-\beta f')f_1\times\quad\big((ff_1'-f'f_1)\beta+(f_1-\beta f_1')f\big)\ ;$$

in ciascuno dei quali tre termini potremo sostituire in vece del secondo fattore il valore che può cavarsene dalla detta equazione che debbe avverarsi: ed otterremo dei scritti tre termini che il primo si trasforma in $(ff_1'-f'f_1)^2\beta^2$, il secondo si trasforma in $(f_1-\beta f_1')^2f^2$, ed il terzo si trasforma in $(f-\beta f')^2f_1^2$. Ed è così che il coefficiente di p^2, diventa il prodotto di $\beta^2+f^2+f_1^2$, pel detto trinomio: os-

sia per brevità di scrittura fatto

(XIII) $$(ff_1'-f'f_1)^2+(f_1-\beta f_1')^2+(f-\beta f')^2=R^2$$

diventa in fine D^2R^2.

In secondo luogo facciamo i prodotti binomii indicati nel coefficiente di $-2D\Delta p$ del secondo termine della equazione (XI). Otterremo un quadrinomio; ed i suoi due termini, i di cui fattori sono al primo grado, si riducono a

$$(ff_1'-f'f_1)\times-((f_1-\beta f_1')f-(f-\beta f')f_1);$$

onde poi sostituito nel secondo fattore di questo il suo valore che ne porge la detta equazione (XII), che debbe avverarsi, il coefficiente di che si tratta si riduce immediatamente al prodotto di β pel detto trinomio R^2, ossia a βR^2.

In fine nel coefficiente di Δ^2 poniamo in vece di D^2 il trinomio $\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}$ che rappresenta (12), ed eseguiamo nel primo suo termine i prodotti per esso trinomio; e nel secondo eseguiamo il quadrato accennato. Dopo le riduzioni ottenghiamo un polinomio del quale due termini moltiplicano β^2, e gli altri tre costituiscono il quadrato perfetto del binomio

$$(f_1-\beta f_1')f-(f-\beta f')f_1;$$

onde possiam porre invece di essi tre termini il valore di questo binomio cavato dalla detta equazione (XII) da avverarsi, elevato al quadrato. Ed è così che il coefficiente di Δ^2 si riduce al prodotto β^2R^2.

Fatte dunque tutte le dette trasformazioni e riduzioni, il primo membro della equazione (XI), da risolversi, diventa, conformemente a ciò che abbiam detto, divisibile pel medesimo fattore trinomio R^2 anzinotato: l'altro fattore risulta il quadrato esatto di $Dp-\Delta\beta$; e quindi essa equazione si trasforma nella semplicissima

$$(Dp-\Delta\beta)^2R^2=\delta^2((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)^2.$$

Riprendiamo ora le medesime tre equazioni (X) da risolversi.

E cominciamo tra la seconda e la terza dall' eliminare prima r e poi p; ottenghiamo le due

$$((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)p=D\Delta(f-\beta f')-((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)\,q$$
$$((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)r=D\Delta(ff_1'-f'f_1)-((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta)\,q$$

E moltiplichiamo ora la prima delle tre equazioni (X) per $((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)^2$; e tra la risultante e le due precedenti eliminiamo p, r. Avremo una equazione contenente la sola incognita q, ed è la

(XIV)

$$\Big\{((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)^2+((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)^2+((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta)$$
$$-2D\Delta\Big\{(f-\beta f')((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)+(ff_1'-f'f_1)((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta$$
$$+\Delta^2\Big\{D^2((ff_1'-f'f_1)^2+(f-\beta f')^2)-((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)^2\Big\}$$
$$=\delta^2((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)^2$$

Ora questa equazione, al pari della (XI), può abbassarsi di grado per mezzo della medesima equazione identica (XII)

$$(ff_1'-f'f_1)\beta+(f_1-\beta f_1')f-(f-\beta f')f_1=0$$

dalla quale dipende immediatamente l' altra

$$((ff_1'-f'f_1)\beta-(f-\beta f')f_1)^2=(f_1-\beta f_1')^2f^2.$$

Ed ecco in qual modo.

Osserviamo in primo che il coefficiente di q^2 essendo in tutto identico a quello di p^2, è come questo riducibile al prodotto D^2R^2.

In secondo luogo eseguiamo i due accennati prodotti binomii nel coefficiente di $-2D\Delta q$; ed in quel solo suo termine, che ne provviene, della forma

$$-(ff_1'-f'f_1)\beta\times(f_1-\beta f_1')$$

poniamo invece del primo fattore il suo valore binomio dato dalla soprascritta equazione (XII) da verificarsi; ed eseguiamo il prodotto di esso binomio pel secondo fattore. Per le riduzioni, che naturalmente si presentano, il coefficiente di che si tratta si riduce imme-

diatamente al medesimo trinomio (XIII), che abbiam detto R^2, moltiplicato per f.

In terzo luogo nel coefficiente di Δ^2 poniamo in luogo di D^2 il trinomio $\beta^2+f^2+f_1^2$, che rappresenta (12), ed eseguiamo nel primo suo termine i prodotti per esso trinomio; e nel secondo il quadrato accennato. Dopo le riduzioni, otteghiamo un polinomio di cinque termini, dei quali tre sono in sostanza il primo membro delle notate da ultimo due equazioni identiche; onde sostituitovi il secondo membro $(f_1-\beta f_1')^2 f^2$, otteghiamo immediatamente per esso coefficiente di Δ^2 il medesimo trinomio R^2, ma moltiplicato per f^2.

La equazione (XIV) dunque, che porge il valore di q, diventa la semplicissima

$$(Dq-\Delta f)^2 R^2 = \delta^2((f'f_1-ff_1')f_1-(f-\beta f')\beta)^2$$

Trattiamo ora analogamente le medesime equazioni (X), e per modo da eliminare prima q, e poi p. Otterremo in primo

$$((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta)p = -D\Delta(f_1-\beta f_1')+((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)\,r$$
$$((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta)q = D\Delta(ff_1'-f'f_1)-((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)\,r$$

E quindi combinando questa colla prima delle equazioni (X), avremo una equazione che contiene la sola incognita r; ed è

(XV)
$$\left\{((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)^2+((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)^2+((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta)^2\right\}r^2$$
$$-2D\Delta\left\{(ff_1'-f'f_1)((ff_1'-f'f_1)f_1+(f-\beta f')\beta)+(f_1-\beta f_1')((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)\right\}r$$
$$+\Delta^2\left\{D^2((ff_1'-f'f_1)^2+(f_1-\beta f_1')^2)-((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta)^2\right\}$$
$$=\delta^2((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta)^2.$$

Ora osserviamo in primo che in questa equazione il coefficiente di r^2 è compiutamente identico a quello di p^2 e q^2 nelle equazioni (XI), e (XIV). Dunque esso è pure come quelli uguale a $D^2 R^2$.

In secondo luogo nel coefficiente di $-2D\Delta r$ eseguiamo le moltiplicazioni accennate per ciascuno dei due binomii che lo compongono. Otterremo un quadrinomio di cui un termine è

$$(f-\beta f')\times(ff_1'-f'f_1)\beta,$$

ed in questo invece del fattore $(ff_1'-f'f_1)\beta$ poniamovi il suo valore cavato dalla solita equazione identica (XII)

$$(ff_1'-f'f_1)\beta+(f_1-\beta f_1')f-(f-\beta f')f_1=0\,;$$

e dopo tal sostituzione eseguiamo il prodotto del valore binomio sostituito, per l' altro fattore $f-\beta f'$. Ottenghiamo in risultato il medesimo trinomio R^2 moltiplicato per f_1.

Per ultimo nel coefficiente di Δ^2, invece di D^2 poniamo il trinomio $\beta^2+f^2+f_1^2$, che rappresenta (12), ed eseguiamo le moltiplicazioni di esso pel binomio che moltiplica D^2; ed anche il quadrato dell' altro binomio. Risultano per le riduzioni cinque termini, dei quali tre costituiscono il primo termine dell' altra equazione identica

$$((ff_1'-f'f_1)\beta+(f_1-\beta f_1')f)^2=(f-\beta f')^2f_1^2$$

equivalente alla precedente. Onde sostituendovi il secondo membro di questa, abbiamo che esso coefficiente si riduce ad $R^2 f_1^2$.

Quindi la equazione (XV) prende la forma semplicissima

$$(Dr-\Delta f_1)^2R^2=\delta^2(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1'))^2.$$

Da tutta l' analisi precedente dunque risulta, che le tre equazioni (X), equivalgono alle altre tre,

$$\text{(XVI)}\qquad \begin{aligned}(Dp-\Delta\beta)R&=\delta(f_1(f_1-\beta f_1')+f(f-\beta f'))\\(Dq-\Delta f)R&=\delta(f_1(f'f_1-ff_1')-\beta(f-\beta f'))\\(Dr-\Delta f_1)R&=\delta(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1'))\end{aligned}$$

nelle quali ciascuna incognita è separata: e potrebbero esse cavarsi immediatamente dalle primiere (X), a causa della simmetrica loro composizione coi coefficienti delle (X) medesime.

14. Osserviamo ora in primo che la R, essendo un radicale (XIII), può competere ad essa un doppio segno; e che però ad ognuna di queste tre equazioni può risponderne un' altra, il di cui primo membro è di segno contrario a quello della precedente.

Or figuriamoci che in una qualunque di queste equazioni sia tutto noto, meno che la δ. Risponderebbero due valori per δ uguali

e di segno contrario. E di fatto menato un piano tangente al cono direttore, potranno stare su questo piano due circonferenze, coi centri su di una stessa retta perpendicolare al lato del contatto, e ad egual distanza δ da esso.

Dunque, in generale, per una medesima generazione, possono esservi due anulari diverse, le di cui generatrici sono uguali e simmetricamente poste intorno a ciascun lato del cono direttore. E non pertanto se il cono direttore fosse chiuso, potrebbero esse generatrici uguali e simmetricamente poste, appartenere ad una sola e medesima superficie: anzi ad una sua medesima falda.

Osserviamo in secondo luogo, che ancora la D, essendo un radicale (12), può avere due segni. E come ciò avvenga è facile concepire.

Essendosi assunta ad origine delle coordinate il vertice del cono direttore (3), è manifesto che se abbia esso nella regione positiva delle coordinate una falda, per esempio, ne avrà una uguale perfettamente e compiutamente simmetrica nella regione negativa. Onde se la curva sua direttrice di equazioni (I)

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=f_1(x) \end{cases}$$

stà in essa medesima regione positiva delle coordinate, ve ne sarà un' altra perfettamente identica nella negativa. Dunque se un punto della prima curva ha $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$ per coordinate, l' altra curva avrà un punto di coordinate $-\beta$, $-f(\beta)$, $-f_1(\beta)$. E la retta congiungente essi due punti sarà divisa in due dalla origine delle coordinate; ogni sua parte sarà lunga $D=\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}$; ed esse medesime parti saranno l' una in senso opposto all' altra.

Ciascuna delle tre ultime equazioni dunque prima ne dà due, a causa del doppio segno di R, e poi ciascuna ne dà altre due a causa del doppio segno di D.

Dunque, in generale, per una medesima generazione, potrebbero esservi quattro anulari diverse, le di cui quattro generatrici su di un medesimo piano sarebbero uguali; ma le quali non pertanto potrebbero appartenere ad una sola e medesima anulare.

Immaginiamo menato il piano tangente al cono direttore. Due circonferenze starebbero da una parte del vertice del cono, le altre due dall'altra parte: e le circonferenze della prima coppia e della seconda avrebbero ciascuna il centro situato su di una medesima retta perpendicolare al lato di contatto e ad egual distanza da esso. E coteste perpendicolari starebbero ad egual distanza dal vertice del cono. Di fatto (12) una tal distanza è appunto Δ. Ed essendo

$$\Delta = \frac{\omega D}{f_1} - \alpha\,;$$

e la D negativa importando implicitamente anche la f_1 negativa, come or ora abbiamo dimostrato, e quindi anche la ω (4), ed anche la α come risulta dalla (VII); la Δ resta sempre la stessa in valore assoluto: e solo di segno può variare, ed al variare di quello della D. E però risulterà sempre $\Delta < \frac{\omega D}{f_1}$, come debb' essere per la sua natura geometrica (12). Che se la α potesse variar di segno indipendentemente dalla D, potrebbe in generale non solo essere $\Delta < \frac{\omega D}{f_1}$, ma ancora $\Delta > \frac{\omega \Delta}{f_1}$. Ammettendo questi due casi, le circonferenze su di un medesimo piano tangente potrebbero essere al numero di otto. Ma le altre quattro apparterrebbero ad una generazione tutta diversa da quella, cui appartengono le prime contemplate di sopra.

Noi assumemmo stare l'anulare sempre tra il vertice del cono direttore e la rigata determinatrice. Assumendo $\Delta > \frac{\omega D}{f_1}$ il contrario avrebbe luogo (12). Ma l'anulare corrispondente avrebbe ancora un'altra rigata ad elementi normali a quelli del cono direttore, che lascerebbe l'anulare medesima tra essa ed il suo vertice: epperò le altre quattro circonferenze apparterrebbero ad anulari di generazione *essenzialmente diversa* da quella, alla quale appartengono le prime quattro. Egli è per tutto ciò che la α va considerata come quantità essenzialmente del medesimo segno della D.

E pure per fissare le idee, riterremo, come positive, sì la R, che la D: e però positive anche le α, δ. E sarà facile applicare i medesimi ragionamenti ai casi di R, D, ed anche α, e δ negativi.

15. Ora risolviamo le equazioni (XVI), equivalenti alle (X). Ottenghiamo

$$\text{(XVII)}\qquad \begin{aligned} p&=\frac{\Delta\beta}{D}+\frac{\delta}{DR}\left(f_1(f_1-\beta f_1')+f(f-\beta f')\right)\\ q&=\frac{\Delta f}{D}+\frac{\delta}{DR}\left(f_1(f'f_1-ff_1')-\beta(f-\beta f')\right)\\ r&=\frac{\Delta f_1}{D}+\frac{\delta}{DR}\left(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1')\right)\end{aligned}$$

E queste sono le coordinate del centro di una individuata circonferenza generatrice di un' anulare qualunque a cono direttore, ed il di cui piano lo tocca secondo il suo lato di equazione (II), che passa pel punto di ascissa β della curva direttrice di esso cono, di equazione (I); e della quale il centro dista da esso lato di contatto del cono per δ, e dalla retta sul suo piano della rigata determinatrice per α, che è il raggio medesimo della individuata circonferenza: quantità nascosta in Δ, che è (12) uguale $\frac{\omega D}{f_1}-\alpha$; e nella quale è ω l' ordinata del punto del lato di contatto, pel quale passa la detta retta della rigata determinatrice.

Onde poi la detta individuata circonferenza generatrice sarà rappresentata dalle due equazioni

$$\text{(XVIII)}\qquad \begin{aligned} &(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2-\alpha^2=0\\ &(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0\end{aligned}$$

nelle quali x, y, z sono le sue coordinate, e p, q, r le coordinate del suo centro, le quali hanno però i precedenti valori (XVII). E queste due ultime equazioni esprimeranno esplicitamente essa individuata circonferenza dell' anulare, quando per p, q, r, avremo sostituito di fatto i loro valori.

16. Per sostituire i valori di p, q, r, nella prima delle due precedenti equazioni, mettiamo questa sotto la forma

$$x^2+y^2+z^2-2(px+qy+rz)=\alpha^2-(p^2+q^2+r^2).$$

In vece di $p^2+q^2+r^2$ poniamo $\delta^2+\Delta^2$, come si ha dalla prima delle equazioni (X), alle quali sono equivalenti le (XVI), che han dati i valori di p, q, r, da sostituirsi; e per p, q, r, al primo grado poniamo i valori effettivi (XVII).

Ottenghiamo , dopo fatte le sostituzioni, le riduzioni che si presentano , e liberata la trasformata dai fratti, per equazioni della individuata circonferenza a cono direttore , le due

(XIX)

$$(x^2+y^2+z^2-\alpha^2+\delta^2+\Delta^2)DR=[2R\Delta\beta+2\delta((f_1-\beta f_1')f_1+(f-\beta f')f)]x$$
$$+[2R\Delta f+2\delta((f'f_1-ff_1')f_1-(f-\beta f')\beta)]y$$
$$+[2R\Delta f_1+2\delta((ff_1'-f'f_1)f-(f_1-\beta f_1')\beta)]z$$
$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0$$

In queste equazioni le derivate f', f_1', sono prese rispetto alla β , quantità di cui sono funzioni (3). Generalizziamo le derivate : esse equazioni prenderanno allora la forma seguente .

(XX)

$$(x^2+y^2+z^2-\alpha^2+\delta^2+\Delta^2)DR=\left[2R\Delta\beta+2\delta\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)\right]x$$
$$+\left[2R\Delta f+2\delta\left(\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'+f_1^3\left(\frac{f}{f_1}\right)'\right)\right]y$$
$$+\left[2R\Delta f_1+2\delta\left(\beta^3\left(\frac{f_1}{\beta}\right)'+f^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'\right)\right]z$$
$$f^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'x+f_1^2\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'y+\beta^2\left(\frac{f}{\beta}\right)'z=0$$

Nelle quali gli apici apposti alle parentesi indicano le derivate ordinarie dei rapporti da esse abbracciati. E sotto quest'ultima forma si fà manifesta la simmetria di ciascun termine , componente il secondo membro della prima equazione , pel modo come sono formati colle coordinate $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$ del punto della direttrice del cono direttore, per lo quale passa quel suo lato che è di suo contatto col piano della individuata circonferenza (3, 10), analoghe alle coordinate x, y, z dei punti della circonferenza medesima.

V.

17. Arrestiamoci ora un momento a contemplare le tre equazioni (XVI) equivalenti alle (X), le quali danno i valori di p, q, r. Potremo pervenire ad appurare alcuna rimarchevole proprietà delle

anulari a cono direttore, ed a semplificare le forme dei valori (XVII) delle coordinate p, q, r, ed anche quelle delle equazioni della circonferenza generatrice.

Ci rammenteremo perciò che se

$$Lx+My+Nz+K=0$$

è la equazione di un piano qualunque, i coseni degli angoli che una retta ad esso normale fà coi tre assi coordinati delle x, y, z sono rispettivamente

$$\frac{L}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}, \frac{M}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}, \frac{N}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$$

e che perciò, essendo

$$(\beta f_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0$$

la equazione del piano tangente al cono direttore, i coseni dei tre angoli che una retta menata pel vertice di esso cono normale ad esso piano fà cogli assunti assi coordinati delle x, y, z, sono rispettivamente (XIII)

$$\frac{1}{R}(\beta f_1'-f'f_1),\ \frac{1}{R}(f_1-\beta f_1'),\ -\frac{1}{R}(f-\beta f').$$

Or chiamiamo, come è nostro solito, C_x, C_y, C_z i coseni degli angoli che la retta normale al piano tangente al cono direttore, menata pel vertice di questo, fà cogli assunti assi delle x, y, z; e dividiamo per R ciascuna delle tre equazioni (XVI); esse prenderanno la forma

$$\text{(XXI)}\qquad \begin{aligned}(Dp-\Delta\beta)&=\delta(C_y f_1-C_z f)\\(Dq-\Delta f)&=\delta(C_z\beta-C_x f_1)\\(Dr-\Delta f_1)&=\delta(C_x f-C_y\beta).\end{aligned}$$

E queste ci palesano una proprietà comune all' universalità delle anulari a cono direttore, la quale non sarebbe difficile enunciare.

18. Rammentiamoci ora che una retta che passa per la origine delle coordinate fa cogli assi delle x, y, z gli angoli dei coseni

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}, \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$$

essendo x, y, z le coordinate di un punto qualunque della retta. E che però sono (12)

$$\frac{\beta}{D}, \frac{f(\beta)}{D}, \frac{f_1(\beta)}{D}$$

i coseni dell' angolo che fa il lato di contatto del piano della individuata circonferenza generatrice dell' anulare, col suo cono direttore.

Or chiamiamo, c_x, c_y, c_z i coseni dell' angolo che esso lato di contatto del cono fà coi tre assunti assi coordinati delle x, y, z; e dividiamo per D ciascuna delle tre ultime equazioni. Esse prenderanno la forma

$$\text{(XXII)} \qquad \begin{aligned} p-\frac{\Delta\beta}{D} &= \delta(C_y c_z - C_z c_y) \\ q-\frac{\Delta f}{D} &= \delta(C_z c_x - C_x c_z) \\ r-\frac{\Delta f_1}{D} &= \delta(C_x c_y - C_y c_x). \end{aligned}$$

19. Pel centro della individuata circonferenza generatrice dell' anulare, intendiamo calata la perpendicolare alla retta di contatto del suo piano col cono direttore dell' anulare, e chiamiamo P, Q, R le coordinate del punto d' incontro di essa perpendicolare colla detta retta di contatto, alla quale è perpendicolare. Per le cose dette al N.° 7. sarà

$$P=\frac{(\beta p+fq+f_1 r)\beta}{\beta^2+f^2+f_1^2}$$

$$Q=\frac{(\beta p+fq+f_1 r)f}{\beta^2+f^2+f_1^2}$$

$$R=\frac{(\beta p+fq+f_1 r)f_1}{\beta^2+f^2+f_1^2}$$

ed in queste p, q, r, hanno le relazioni espresse per le equazioni (X), che ne danno i valori; ed il trinomio $\beta^2+f^2+f_1^2$ è lo stesso che quello che abbiamo indicato (12) con D^2. Dunque a causa della seconda delle equazioni (X), abbiamo

$$P=\frac{\Delta\beta}{D}, Q=\frac{\Delta f}{D}, R=\frac{\Delta f_1}{D}.$$

Dunque le equazioni (XVI) prendono in ultimo la elegantissima forma

$$\text{(XXIII)}\qquad \begin{aligned} p-P&=\delta(C_y\,c_z - C_z\,c_y) \\ q-Q&=\delta(C_z\,c_x - C_x\,c_z) \\ r-R&=\delta(C_x\,c_y - C_y\,c_x) \end{aligned}$$

E queste ci palesano un' altra proprietà comune a tutte le anulari a cono direttore, che possiamo enunciare col seguente

Teorema. *Pel vertice del cono direttore dell' anulare s' intendano menati tre piani ortogonali qualunque, e dal centro di una individuata sua circonferenza generatrice la perpendicolare che ne misura la distanza dal lato di contatto del suo piano col cono. Tale distanza è uguale al rapporto della differenza delle distanze dei suoi estremi da uno qualunque dei detti tre piani ortogonali, alla differenza dei prodotti dei coseni degli angoli che il lato di contatto col cono fà colle rette d' intersezione di esso piano con ciascuno degli altri due piani ortogonali, pel coseno degli angoli che con ciascuna di esse medesime rette d' intersezione, ma in ordine inverso, fà un' altra retta menata pel vertice del cono normale al piano della individuata circonferenza medesima.*

20. Pertanto introdotti nelle equazioni (XVIII) i valori di p,q,r, dedotti dalle ultime tre equazioni (XXIII), ottenghiamo per equazioni della individuata circonferenza generatrice le due

(XXIV)

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2-2(Px+Qy+Rz) \\ &-2\delta\big((C_y\,c_z - C_z\,c_y)x+(C_x\,c_z - C_z\,c_x)y+(C_x\,c_y - C_y\,c_x)z\big) \\ &\qquad=\alpha^2-\delta^2-\Delta^2 \\ &\qquad\qquad C_x\,x+C_y\,y+C_z\,z=0. \end{aligned}$$

Delle quali la seconda si ottiene speditamente dividendo la equazione del piano tangente per R.

Od anche riponendo per P, Q, R, le quantità che rappresentano (19), le due

(XXV)

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-\alpha^2+\delta^2+\Delta^2=&\big(2\Delta c_x + 2\delta(C_y\,c_z - C_z\,c_y)\big)x \\ &+\big(2\Delta c_y + 2\delta(C_z\,c_x - C_x\,c_z)\big)y \\ &+\big(2\Delta c_z + 2\delta(C_x\,c_y - C_y\,c_x)\big)z \end{aligned}$$

$$C_x\,x+C_y\,y+C_z\,z=0$$

Equazioni, queste due ultime, libere da derivate. E nelle quali equazioni precedenti sono x, y, z le coordinate di un punto della individuata circonferenza dell' anulare riferite a tre assi ortogonali, la di cui origine è nel vertice del cono direttore di essa (3), Δ è la distanza da esso vertice della retta della rigata determinatrice che giace sul piano di essa individuata circonferenza (12); C_x, C_y, C_z i coseni degli angoli che una retta normale ad un tal piano per la origine degli assi coordinati, fà cogli assi medesimi rispettivamente degli x, y, z (17); c_x, c_y, c_z i coseni degli angoli, che il lato di contatto del piano col cono direttore fà con essi medesimi assi coordinati pure rispettivamente delle x, y, z (18); δ la distanza del centro della individuata circonferenza dal lato stesso di contatto; α il suo raggio ed insieme distanza del suo centro dalla retta della rigata, la quale giace sul suo piano (9); e P, Q, R le coordinate del piede della perpendicolare che misura la distanza δ (19).

ARTICOLO II.

Espressione di un punto della Caratteristica.

I.

21. Trovata la equazione di una individuata circonferenza generatrice di una superficie anulare qualunque di quelle a cono direttore, e propriamente di quella il di cui piano tocca la curva direttrice del suo cono direttore nel punto di ascissa β (3), secondo il nostro proponimento (2), facciamoci a trovare le equazioni di quell' individuato punto di tale individuata circonferenza, il quale appartiene ad una caratteristica individuata dell'anulare: e propriamente a quella caratteristica, la distanza angolare dei punti della quale dalla curva di contatto dell' anulare colla sua rigata determinatrice, è tale da avere per tangente trigonometrica τ.

Immaginiamo esistere il cono direttore dell' anulare; il piano della individuata circonferenza ad esso tangente; e sur esso la circonferenza medesima. Se pel centro di questa circonferenza, imma-

giniamo condotta una retta parallela al lato di contatto del piano col cono, il punto d'intersezione di questa retta colla individuata circonferenza, il quale è il più lontano dal vertice del cono, è un punto della curva di contatto dell'anulare colla sua rigata determinatrice (1): e da un tal punto debbe misurarsi la distanza angolare τ del punto della circonferenza generatrice, che appartiene alla individuata caratteristica, del quale cerchiamo le equazioni. Ed è manifesto che se per esso punto e pel centro della individuata circonferenza generatrice, intendiamo menata una retta, questa farà, colla retta precedentemente immaginata menata parallelamente alla retta di contatto del cono direttore col piano di essa individuata circonferenza, un angolo per lo appunto di tangente τ; e che però la detta retta che passa pel punto di essa individuata circonferenza, il quale appartiene alla individuata caratteristica, e pel centro della medesima circonferenza, fà colla retta di contatto del piano di questa col cono direttore un angolo parimenti di tangente τ.

Ora le equazioni della retta del contatto del piano della individuata circonferenza dell'anulare col suo cono direttore sono (3) le (II)

$$\begin{cases} \beta y - fx = 0 \\ \beta z - f_1 x = 0. \end{cases}$$

Dunque trattasi di trovare la equazione di una retta che passa pel punto delle coordinate p, q, r, del centro di essa individuata circonferenza (5,11), e che fà colla retta di esse equazioni (II) l'angolo la di cui tangente è τ.

E le equazioni che otterremo, per una tal retta, combinate colle equazioni della circonferenza generatrice, daranno il punto della individuata caratteristica.

22. Sia dunque per un momento

$$y = Az + B$$

una delle equazioni della retta che, passando pel centro della individuata circonferenza dell'anulare, debbe fare l'angolo di tangente τ colla retta di contatto del piano di essa col cono direttore. Sarà

$$y = Az$$

quella di una retta ad essa parallela per la origine delle coordinate. E dovendo quella stare sul piano della individuata circonferenza, il quale tocca il cono direttore, l' altra sua equazione sarà quella di esso medesimo piano tangente, cioè (10) la (VIII)

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0.$$

Onde poi le equazioni della retta parallela a quella di che si tratta, e che passa per la origine, sono le due

$$\begin{cases} x=\dfrac{((f-\beta f')-(f_1-\beta f_1')A)z}{ff_1'-f'f_1} \\ y=Az \end{cases}$$

delle quali la prima si ottiene ponendo nella equazione del piano tangente invece di y il suo valore Az.

E pertanto dobbiamo determinare la A, in esse equazioni, per modo che la retta, che rappresentano, faccia l' angolo la di cui tangente è τ colla retta del contatto del piano della individuata circonferenza generatrice dell' anulare col suo cono direttore; le di cui equazioni sono (3) le (II) che possono scriversi ancora

$$\begin{cases} x=\dfrac{\beta}{f_1}z \\ y=\dfrac{f}{f_1}z \end{cases}$$

23. A causa del noto valore del coseno dell' angolo di due rette, in funzione dei coefficienti delle loro equazioni, avremo la equazione di condizione seguente, per la quale la A vien determinata come si deve, ed è la

(XXVI)

$$\frac{f_1(ff_1'-f'f_1)+\beta((f-\beta f')-(f_1-\beta f_1')A)+f(ff_1'-f'f_1)A}{D\sqrt{(ff_1'-f'f_1)^2+((f-\beta f')-(f_1-\beta f_1')A)^2+(ff_1'-f'f_1)^2A^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

nella quale, al solito (12), stà D per la distanza $\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}$, ed è

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}=\cos.(A.\text{tang}.\tau).$$

E questa equazione di condizione debbe aver luogo, perchè la equazione

$$y=Az+B$$

possa appartenere alla retta richiesta, che debbe fare colla retta di contatto del piano della individuata circonferenza generatrice dell'anulare col suo cono determinatore, l'angolo di tangente τ. Ma una tal retta debbe passare in oltre pel centro di essa circonferenza (21), le di cui coordinate (5,11) sono p, q, r. Dunque colla

$$y=Az+B,$$

debbe aver luogo l'altra

$$q=Ar+B.$$

Onde poi è

$$y-q=A(z-r).$$

Ed in questa, sostituito il valore di A cavato dalla equazione di condizione soprascritta (XXVI), otterremo l'una delle equazioni della retta richiesta; mentre per l'altra può ritenersi (22) la medesima

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0.$$

Ora sarebbe poco spedito il cavare il valore di A dalla soprascritta equazione di condizione (XXVI), e sostituirlo nella

$$y-q=A(z-r);$$

caviamo dunque invece da questa il valore di A e sostituiamolo in quella di condizione (XXVI).

Dalla equazione precedente ottenghiamo

$$A=\frac{y-q}{z-r}$$

*

e questo valore sostituito nella equazione di condizione suddetta, porge

(XXVII)

$$\frac{f_1(ff_1'-f'f_1)(z-r)+\beta((f-\beta f')(z-r)-(f_1-\beta f_1')(y-q))+f(ff_1'-f'f_1)(y-q)}{D\sqrt{(ff_1'-f'f_1)^2(z-r)^2+((f-\beta f')(z-r)-(f_1-\beta f_1')(y-q))^2+(ff_1'-f'f_1)^2(y-q)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+}}$$

Per semplificare quest' ultima equazione, riflettiamo che l' altra equazione della retta richiesta, per essere la equazione medesima del piano tangente al cono direttore (22), sul quale giace la individuata circonferenza generatrice, debbe essere soddisfatta dalle coordinate del centro di questa. Dunque colla equazione

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0$$

debbe esistere l'altra

$$(ff_1'-f'f_1)p+(f_1-\beta f_1')q-(f-\beta f')r=0\ ;$$

ed entrambe simultaneamente coll' ultima equazione che vogliamo semplificare. Questa dunque dovrà esistere coll' altra che si ottiene sottraendo queste due ultime l' una dall' altra: dovrà esistere cioè simultaneamente colla

$$(ff_1'-f'f_1)(x-p)+(f_1-\beta f_1')(y-q)-(f-\beta f')(z-r)=0$$

ossia coll' altra

$$(f-\beta f')(z-r)-(f_1-\beta f_1')(y-q)=(ff_1'-f'f_1)(x-p)$$

Tanto nel numeratore dunque, quanto nel denominatore del primo membro della equazione (XXVII), che vogliamo semplificare, possiamo porre in luogo del binomio $(f-\beta f')(z-r)-(f_1-\beta f_1')(y-q)$, il monomio $(ff_1'-f'f_1)(x-p)$. Ed essi, numeratore e denominatore, acquisteranno il fattore comune $(ff_1'-f'f_1)$. E quindi essa equazione diventa

(XXVIII)

$$\frac{\beta(x-p)+f(y-q)+f_1(z-r)}{D\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$$

nella quale p, q, r sono le coordinate del centro della individuata circonferenza generatrice; e però debbe intendersi che abbiano i valori (XVII) già trovatine (15), ovvero abbiano le relazioni espresse colle equazioni (X); alle quali equivalgono (13) le (XVI) che danno essi valori (XVII).

E pertanto quest' ultima equazione (XXVIII) insieme colle (XIX) della individuata circonferenza dell' anulare, o le (XVIII) ad esse equivalenti, esprimeranno quell' individuato punto di una individuata circonferenza generatrice dell' anulare, il quale punto appartiene a quella caratteristica dell' anulare la distanza angolare dei punti della quale, dalla curva di contatto dell' anulare colla sua rigata determinatrice, è tale da avere per tangente trigonometrica τ. Però a causa della prima delle equazioni (XVIII) che esister debbono simultaneamente colla equazione (XXVIII), il denominatore di questa si riduce a $D\varkappa$. Onde poi il punto della individuata circonferenza generatrice, appartenente alla detta individuata caratteristica, ha per equazioni le tre

$$\text{(XXIX)}\qquad \begin{aligned} &(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=\varkappa^2 \\ &\beta(x-p)+f(y-q)+f_1(z-r)=\frac{D\varkappa}{\sqrt{1+\tau^2}} \\ &(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0 \end{aligned}$$

Nelle quali x, y, z, sono le coordinate del punto della caratteristica, e p, q, r le coordinate del centro della circonferenza generatrice dell' anulare sul quale esso punto si trova, e che però aver debbono i valori (XVII).

24. Otterremo esplicitamente le equazioni, od espressioni che danno esso punto della individuata circonferenza, ponendo di fatto in queste tre ultime equazioni, in luogo di p, q, r, i loro valori (XVII). La prima e terza diventeranno le medesime equazioni (XIX), ovvero le (XX); e subito si vede ciò che diventa la seconda, perciocchè trasformandosi immediatamente nella

$$\beta x+fy+f_1z=\beta p+fq+f_1r+\frac{D\varkappa}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

è chiaro che senza uopo di sostituirvi i valori effettivi (XVII) di p, q, r, basta pel trinomio $\beta p+fq+f_1r$, porre il suo valore $D\Delta$ dato dalla seconda delle (X), che sono in sostanza (13) quelle che danno essi medesimi valori di p, q, r: e che però diventa

$$\beta x+fy+f_1z=D\Delta+\frac{D\alpha}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Quindi daranno il punto della individuata circonferenza, appartenente alla individuata caratteristica le tre

(XXX)

$$(x^2+y^2+z^2-\alpha^2+\delta^2+\Delta^2)DR=\left[2R\Delta\beta+2\delta\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)\right]x$$
$$+\left[2R\Delta f+2\delta\left(\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'+f_1^3\left(\frac{f}{f_1}\right)'\right)\right]y$$
$$+\left[2R\Delta f_1+2\delta\left(\beta^3\left(\frac{f_1}{\beta}\right)'+f^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'\right)\right]z$$

$$\beta x+fy+f_1z-D\left(\Delta+\frac{\alpha}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)=0$$

$$f^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'x+f_1^2\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'y+\beta^2\left(\frac{f}{\beta}\right)'z=0$$

E queste tre ultime equazioni risolute rispetto alle coordinate x, y, z, daranno esplicitamente le coordinate del punto della caratteristica. Ma poichè la risoluzione di queste tre ultime equazioni rispetto ad x, y, z, potrebbe risultare molto laboriosa, e d'altronde, per le ulteriori ricerche è utile la conoscenza effettiva di esse coordinate, facciamoci a determinarle per altra via assai spedita.

II.

25. Siano a, b, c le coordinate del punto della individuata circonferenza generatrice, appartenente alla individuata caratteristica dell' anulare.

Sul piano di essa circonferenza, il quale tocca la direttrice del

cono direttore nel punto di ascissa β (10, 11), stando tanto esso punto della caratteristica (21), quanto il centro della circonferenza individuata (11), debbono aver luogo le equazioni

$$(ff_1'-f'f_1)a+(f_1-\beta f_1')b-(f-\beta f')c=0$$
$$(ff_1'-f'f_1)p+(f_1-\beta f_1')q-(f-\beta f')r=0$$

E quindi l' altra che da esse dipende

$$(ff_1'-f'f_1)(a-p)+(f_1-\beta f_1')(b-q)-(f-\beta f')(c-r)=0.$$

Potremo dunque ottenere i valori effettivi di a, b, c, risolvendo simultaneamente quest'ultima equazione colle due prime delle (XXIX); ossia le tre

$$(a-p)^2+(b-q)^2+(c-r)^2=x^2$$
$$\text{(XXXI)}\quad \beta(a-p)+f(b-q)+f_1(c-r)=\frac{Dx}{\sqrt{1+\tau^2}}$$
$$(ff_1'-f'f_1)(a-p)+(f_1-\beta f_1')(b-q)-(f-\beta f')(c-r)=0$$

26. Per risolvere speditamente queste equazioni osserviamo ch' esse sono perfettamente analoghe alle (X), considerando come se in luogo delle tre incognite p, q, r di queste, vi fossero i binomii $a-p$, $b-q$, $c-r$; e che però senza punto rifare i calcoli, potremo immediatamente ottenere i valori di questi binomii, facendo invece

$$\delta^2+\Delta^2=x^2,\ D\Delta=\frac{Dx}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Da queste due ultime equazioni otteghiamo

$$\Delta=\frac{x}{\sqrt{1+\tau^2}},\ \delta=\frac{x\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}$$

Onde sostituendo questi valori di Δ, e δ nei valori (XVII), ed in vece di p, q, r, i suddetti binomii $a-p$, $b-q$, $c-r$, otterremo pei valori di questi medesimi binomii

(XXXII)

$$a-p=\frac{\alpha\beta}{D\sqrt{(1+\tau^2)}}+\frac{\alpha\tau}{DR\sqrt{(1+\tau^2)}}\left(f_1(f_1-\beta f_1')+f(f-\beta f')\right)$$

$$b-q=\frac{\alpha f}{D\sqrt{(1+\tau^2)}}+\frac{\alpha\tau}{DR\sqrt{(1+\tau)^2}}\left(f_1(f'f_1-ff_1')-\beta(f-\beta f')\right)$$

$$c-r=\frac{\alpha f_1}{D\sqrt{(1+\tau^2)}}+\frac{\alpha\tau}{DR\sqrt{(1+\tau^2)}}\left(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1')\right):$$

E questi valori sono i medesimi che avremmo ottenuti risolvendo le equazioni (XXXI) rispetto ad $a-p$, $b-q$, e $c-r$. Onde volendo i valori di a, b, c, non dobbiamo che invece di p, q, r, sostituirvi i loro valori (XVII). È così, che fatte tali sostituzioni, e le riduzioni che si presentano, otteghiamo

(XXXIII)

$$a=\frac{\beta}{D}\left(\Delta+\frac{\alpha}{\sqrt{(1+\tau^2)}}\right)+\frac{1}{DR}\left(\delta+\frac{\alpha\tau}{\sqrt{(1+\tau^2)}}\right)\left(f_1(f_1-\beta f_1')+f(f-\beta f')\right)$$

$$b=\frac{f}{D}\left(\Delta+\frac{\alpha}{\sqrt{(1+\tau^2)}}\right)+\frac{1}{DR}\left(\delta+\frac{\alpha\tau}{\sqrt{(1+\tau^2)}}\right)\left(f_1(f'f_1-ff_1')-\beta(f-\beta f')\right)$$

$$c=\frac{f_1}{D}\left(\Delta+\frac{\alpha}{\sqrt{(1+\tau^2)}}\right)+\frac{1}{DR}\left(\delta+\frac{\alpha\tau}{\sqrt{(1+\tau^2)}}\right)\left(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1')\right).$$

E queste sono le coordinate effettive di quel punto della individuata circonferenza generatrice dell' anulare, individuata dall' ascissa β, il quale appartiene alla individuata caratteristica dell' anulare, la distanza angolare di tutti i punti della quale dalla linea di contatto dell' anulare colla sua rigata determinatrice è quell' arco di cui la tangente trigonometrica è τ (21).

III.

27. Prima di passare oltre fermiamoci un momento a considerare gli elementi che entrano nella composizione dei valori (XXXIII) di a, b, c.

Ed osserviamo in primo che essendo τ la tangente trigonome-

trica, sono $\frac{1}{\sqrt{(1+\tau^2)}}$ il coseno trigonometrico, e $\frac{\tau}{\sqrt{(1+\tau^2)}}$ il seno trigonometrico dell' arco la di cui tangente è τ. Sono quindi

$$\frac{\alpha}{\sqrt{(1+\tau^2)}}, \quad \frac{\alpha\tau}{\sqrt{(1+\tau^2)}}$$

il coseno ed il seno nella individuata circonferenza, che è di raggio α, dell' angolo che la retta menata pel suo punto che appartiene alla caratteristica dell' anulare, e pel suo centro, fà colla retta menata pel centro medesimo parallelamente al lato di contatto del cono direttore, col piano di essa individuata circonferenza. Se dunque dal punto di questa, che appartiene alla individuata caratteristica, intendiamo menata una perpendicolare al lato di contatto del cono direttore col piano della individuata circonferenza, la distanza di esso punto della caratteristica da essa retta di contatto sarà appunto espressa (9) da

$$\delta+\frac{\alpha\tau}{\sqrt{(1+\tau^2)}};$$

e la distanza dell' incontro della detta perpendicolare, col lato di contatto suddetto, dal vertice del cono direttore (12), sarà espressa da

$$\Delta+\frac{\alpha}{\sqrt{(1+\tau^2)}}.$$

Ecco dunque i significati di questi binomii, che entrano nella composizione dei valori (XXXIII) di a, b, c: ed è manifesto essere esse distanze rispettivamente analoghe alle δ, Δ. Facciamo dunque per analogia,

$$\Delta+\frac{\alpha}{\sqrt{(1+\tau^2)}}=\Delta_1, \quad \delta+\frac{\alpha\tau}{\sqrt{(1+\tau^2)}}=\delta_1.$$

otterremo

$$\text{(XXXIV)} \quad \begin{aligned} a&=\frac{\Delta_1\beta}{D}+\frac{\delta_1}{DR}\left(f_1(f_1-\beta f_1')+f(f-\beta f')\right) \\ b&=\frac{\Delta_1 f}{D}+\frac{\delta_1}{DR}\left(f_1(f'f_1-ff_1')-\beta(f-\beta f')\right) \\ c&=\frac{\Delta_1 f_1}{D}+\frac{\delta_1}{DR}\left(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1')\right). \end{aligned}$$

Espressioni perfettamente analoghe alle (XVII) delle p, q, r. E nelle espressioni di queste, le quantità Δ, δ sono sempre le stesse per una medesima circonferenza generatrice, ma variano da una all'altra; mentre le Δ_1, δ_1, non solo variano passandosi da un punto di una individuata circonferenza a quello di un' altra, ma ancora passandosi da un punto all'altro di una medesima circonferenza.

28. Per analogia di ciò che abbiam detto nel numero 19, sono $\frac{\Delta_1\beta}{D}$, $\frac{\Delta_1 f}{D}$, $\frac{\Delta_1 f_1}{D}$, le coordinate del punto d'incontro della perpendicolare calata dal punto della individuata circonferenza generatrice appartenente alla individuata caratteristica, sul lato di contatto del piano di essa circonferenza col cono direttore, con esso medesimo lato di contatto. Se dunque chiamiamo A, B, C, le coordinate di un tal punto d' incontro, tenendo conto delle altre cose dette nei N.ⁱ 17 e 18, otterremo dalle (XXXIV) le tre relazioni seguenti

$$\text{(XXXV)}\qquad \begin{aligned} a-A&=\delta_1(C_y c_z - C_z c_y) \\ b-B&=\delta_1(C_z c_x - C_x c_z) \\ c-C&=\delta_1(C_x c_y - C_y c_x). \end{aligned}$$

Ed ecco per ogni punto della caratteristica dell' anulare una proprietà analoga a quella enunciata in fine del N.° 19.

Ed osserveremo che le ultime tre relazioni (XXXV) restando sempre ferme qualunque sia α, la enunciata proprietà appartiene ad ogni punto del piano tangente ad un cono qualunque: proprietà non ancora avvertita.

La enunciata proprietà compete al centro di una generatrice qualunque dell' anulare, ad un punto qualunque di essa generatrice, e ad un punto di una caratteristica qualunque; ma non appartiene ad essi punti soltanto: appartiene ad un tempo ad ogni punto del piano tangente.

E pertanto dal quì detto n' emerge una curiosa proprietà del cono a curva qualunque direttrice, che può enunciarsi col seguente

Teorema. *Il rapporto della retta che misura la distanza di un punto qualunque di un medesimo piano tangente ad un cono a curva direttrice qualunque, dalla retta del contatto, alla diffe-*

renza delle distanze degli estremi di quella stessa retta, da un medesimo piano menato pel vertice del cono, è costante.

E ciò si fà manifesto, considerando che per un medesimo piano tangente, e per tre medesimi piani ortogonali menati per lo vertice del cono, ciascuno dei binomii $C_y c_z - C_z c_y$, $C_z c_x - C_x c_z$, $C_x c_y - C_y c_x$ si mantiene costante qualunque sia il punto del piano tangente, dal quale si computino le distanze $a, b, c, A, B, C, \delta_1$.

ARTICOLO III.

Espressione di una retta della inviluppata rigata.

I.

29. Una retta che, passando per tutti i punti successivi di una medesima caratteristica, tocca sempre la circonferenza generatrice dell' anulare sulla quale ciascuno di essi punti successivi si trova, e nel punto medesimo, genera la inviluppata rigata dell' anulare. Ora consideriamo quella retta dell' inviluppata, che tocca l' individuata circonferenza generatrice, contemplata innanzi (Art.° I.); e la quale passa pel suo punto appartenente alla individuata caratteristica parimenti già contemplata (Art.° II).

Questa retta della inviluppata, passerà dunque pel punto delle coordinate a, b, c, della individuata circonferenza, il quale appartiene alla individuata caratteristica (25); e sarà perpendicolare al raggio di essa individuata circonferenza, il quale passa per esso medesimo punto di coordinate a, b, c.

30. Or questo raggio, come ogni altro, passa pel centro della individuata circonferenza, le di cui coordinate sono (11) p, q, r. Dunque le equazioni della retta, di cui esso raggio è parte, sono quelle di una retta che passa pei punti di coordinate a, b, c l' uno, e p, q, r, l' altro. Però sono le due

$$\text{(XXXVI)} \qquad \begin{cases} x-p=\dfrac{a-p}{c-r}(z-r) \\[2ex] y-q=\dfrac{b-q}{c-r}(z-r) \end{cases}$$

*

Ed una retta a questa parallela, menata per la origine delle coordinate, avrà per equazioni

$$(\text{XXXVII}) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a-p}{c-r}\,z \\ y = \dfrac{b-q}{c-r}\,z, \end{cases}$$

nelle quali a, b, c, p, q, r, debbono avere i valori trovati (XXXIII), e (XVII).

31. La retta della individuata inviluppata, dovendo passare (29) pel punto delle coordinate a, b, c, abbia per una delle sue equazioni

$$y-b=M(z-c)$$

Onde poi, giacendo essa retta (29,10) sul piano di equazione (VIII)

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0\ ,$$

una retta ad essa parallela e che passa per la origine delle coordinate, sarà rappresentata da

$$\begin{cases} x = \dfrac{\{(f-\beta f')-(f_1-\beta f_1')M\}z}{(ff_1'-f'f_1)} \\ y = Mz\ ; \end{cases}$$

perciocchè il piano tangente che la precedente equazione (VIII) rappresenta, passa per la origine (10); e la prima di queste due ultime si ottiene eliminando la y tra la seconda di esse, e la equazione medesima del piano, su cui la retta debbe giacere.

32. Or quest' ultima retta dovendo essere perpendicolare (29) a quella delle equazioni (XXXVII), dovrà aver luogo (come è notissimo per gli elementi) la equazione di condizione

$$(\text{XXXVIII}) \qquad 1+\frac{(a-p)(f-\beta f'-(f_1-\beta f_1')M)}{(c-r)(ff_1'-f'f_1)}+\frac{(b-q)M}{c-r}=0$$

E da questa equazione caveremo M; onde poi resterà determinata la equazione

$$y-b=M(z-c)\ ,$$

che insieme colla

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0$$

rappresentano la individuata retta della inviluppata (31).

Or risolvendo rispetto ad M la equazione di condizione (XXXVIII) soprascritta, ed eguagliandone il valore all' altro

$$M=\frac{y-b}{z-c}$$

cavatone dalla detta assunta equazione della retta richiesta, ottenghiamo

$$\text{(XXXIX)}\qquad \frac{y-b}{z-c}=\frac{(f-\beta f')(a-p)+(ff_1'-f'f_1)(c-r)}{(f_1-\beta f_1')(a-p)-(ff_1'-f'f_1)(b-q)}$$

E sono quindi le equazioni della retta della inviluppata, che tocca l' individuata circonferenza generatrice, contemplata innanzi, e la quale la tocca nel suo punto appartenente alla individuata caratteristica parimenti già contemplata, le due

$$\text{(XL)}\left\{\begin{array}{l}((f_1-\beta f_1')(a-p)-(ff_1'-f'f_1)(b-q))(y-b)-((f-\beta f')(a-p)+(ff_1'-f'f_1)(c-r))(z-c)=0\\(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0\end{array}\right.$$

Ma nella prima delle quali per a, b, c debbono intendersi li valori loro (XXXIII), e per p, q, r, i loro valori (XVII): onde esse equazioni non esprimeranno esplicitamente essa retta della inviluppata, che quando avremo sostituiti di fatto i detti valori di a, b, c, e di p, q, r, nella prima di esse medesime equazioni, ossia nella sua equivalente (XXXIX).

33. Per ciò fare nel primo membro della equazione (XXXIX), in vece di b e c sostituiamovi i loro valori dati dalle (XXXIII); e nel suo secondo membro, sostituiamo i valori (XXXII) dei binomii $a-p$, $b-q$, $c-r$. Ottenghiamo per essa prima equazione

$$\text{(XLI)}\qquad \frac{y\sqrt{1+\tau^2}-\frac{f}{D}(\alpha+\Delta\sqrt{1+\tau^2})-\frac{1}{DR}(\alpha\tau+\delta\sqrt{1+\tau^2})(f_1(f'f_1-ff_1')-\beta(f-\beta f'))}{z\sqrt{1+\tau^2}-\frac{f_1}{D}(\alpha+\Delta\sqrt{1+\tau^2})-\frac{1}{DR}(\alpha\tau+\delta\sqrt{1+\tau^2})(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1'))}=$$

$$\frac{(f-\beta f')\left\{\frac{\beta}{D}+\frac{\tau}{DR}(f_1(f_1-\beta f_1')+f(f-\beta f'))\right\}+(ff_1'-f'f_1)\left\{\frac{f_1}{D}+\frac{\tau}{DR}(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1'))\right\}}{(f_1-\beta f_1')\left\{\frac{\beta}{D}+\frac{\tau}{DR}(f_1(f_1-\beta f_1')+f(f-\beta f'))\right\}-(ff_1'-f'f_1)\left\{\frac{f}{D}+\frac{\tau}{DR}(f_1(f'f_1-ff_1')-\beta(f-\beta f'))\right\}};$$

dopo averne moltiplicato il numeratore ed il denominatore del primo membro per $\sqrt{1+\tau^2}$, e quelli del secondo membro per $\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+\tau^2}$.

III.

34. Per ottenere un' altra equazione equivalente alla precedente, ma in termini molto più accorciati, rammentiamoci ciò che abbiam detto ai N. 17 e 18; e dividiamo il numeratore ed il denominatore del secondo membro per R, per modo che i coefficienti binomii di ciascun termine del numeratore e del denominatore diventino $\frac{1}{R}(f_1-\beta f_1')$, $\frac{1}{R}(ff_1'-f'f_1)$, $\frac{1}{R}(f-\beta f')$. Le due equazioni, di che si tratta, prendono la elegantissima forma

$$(\mathrm{XLII})\quad\begin{cases}\dfrac{y\sqrt{1+\tau^2}-c_y(\alpha+\Delta\sqrt{1+\tau^2})-(\alpha\tau+\delta\sqrt{1+\tau^2})(C_z c_x-C_x c_z)}{z\sqrt{1+\tau^2}-c_z(\alpha+\Delta\sqrt{1+\tau^2})-(\alpha\tau+\delta\sqrt{1+\tau^2})(C_x c_y-C_y c_x)}=\\[2ex] \dfrac{-C_z[c_x+(C_y c_z-C_z c_y)\tau]+C_x[c_z+(C_x c_y-C_y c_x)\tau]}{C_y[c_x+(C_y c_z-C_z c_y)\tau]-C_x[c_y+(C_z c_x-C_x c_z)\tau]}\\[2ex] C_x x+C_y y+C_z z=0\end{cases}$$

E queste sono le equazioni di quella individuata retta della inviluppata di parametro di posizione τ, la quale tocca la circonferenza generatrice dell' anulare, di cui il piano tocca il cono direttore di essa, secondo una retta che fà cogli assi coordinati delle x, y, z, gli angoli dei coseni c_x, c_y, c_z; ed il quale ha tale posizione che la retta ad esso normale, menata per le origini delle coordinate, fà coi medesimi assi gli angoli dei coseni C_x, C_y, C_z.

ARTICOLO IV.

Espressione di una retta della Rigata a generatrice normale a quella della Inviluppata.

I.

35. Fissiamo un punto sulla circonferenza mobile che genera l' anulare, e sia τ la tangente trigonometrica del suo arco, inter-

cetto tra esso punto e l' altro, per lo quale menatale la tangente, questa risulta normale al lato di contatto del cono direttore dell'anulare col piano della circonferenza mobile; e supponiamo pel fissato punto menata la tangente ad essa circonferenza, ed il raggio di questa, che intenderemo prolungato. Movendosi la circonferenza, il fissato punto genera una caratteristica dell' anulare (21), la retta tangente, alla circonferenza mobile, in esso fissato punto, genera una sua inviluppata rigata (29), ed il raggio della circonferenza, per esso medesimo punto, prolungato genera una rigata a generatrice normale a quella della inviluppata.

Ora del fissato punto abbiamo dette (25) le coordinate a, b, c; e sono coordinate del centro della circonferenza mobile in una sua individuata posizione le p, q, r, (11).

Dunque la retta che passa pel punto delle coordinate a, b, c, e per l' altro delle coordinate p, q, r, è la retta della rigata a generatrice normale a quella della inviluppata: e propriamente quella corrispondente alla individuata circonferenza il di cui piano tocca la direttrice del cono direttore nel punto delle coordinate $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$; ossia quella che giace sul piano tangente al cono direttore dell'anulare (10), piano di equazione (VIII)

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0:$$

Essa retta dunque ha per equazioni le medesime (XXXVI), ovvero altre due a quelle equivalenti, ma nelle quali a, b, c, p, q, r, debbono avere i valori determinati innanzi (XXXIII) e (XVII): le quali equazioni, alle (XXXVI) equivalenti, sono

$$\text{(XLIII)} \qquad \begin{cases} \dfrac{x-p}{z-r}=\dfrac{a-p}{c-r} \\[2ex] \dfrac{y-q}{z-r}=\dfrac{b-q}{c-r} \end{cases}$$

36. Sostituiamo in queste equazioni i detti valori di a, b, c, p, q, r; o ciò che torna allo stesso nel loro primo membro in vece di p, q, r sostituiamo i loro valori (XVII), e nei secondi membri, invece dei binomii $a-p$, $b-q$, $c-r$ poniamovi i loro valori (XXXII). Fatte

le sostituzioni ottenghiamo

(XLIV)

$$\begin{cases} \dfrac{x-\dfrac{\Delta\beta}{D}-\dfrac{\delta}{DR}(f_1(f_1-\beta f_1')+f(f-\beta f'))}{z-\dfrac{\Delta f_1}{D}-\dfrac{\delta}{DR}(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1'))}=\dfrac{\dfrac{\beta}{D}+\dfrac{\tau}{DR}(f_1(f_1-\beta f_1')+f(f-\beta f'))}{\dfrac{f_1}{D}+\dfrac{\tau}{DR}(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1'))} \\[2ex] \dfrac{y-\dfrac{\Delta f}{D}-\dfrac{\delta}{DR}(f_1(f'f_1-ff_1')-\beta(f-\beta f'))}{z-\dfrac{\Delta f_1}{D}-\dfrac{\delta}{DR}(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1'))}=\dfrac{\dfrac{f}{D}+\dfrac{\tau}{DR}(f_1(f'f_1-ff_1')-\beta(f-\beta f'))}{\dfrac{f_1}{D}+\dfrac{\tau}{DR}(f(ff_1'-f'f_1)-\beta(f_1-\beta f_1'))} \end{cases}$$

E queste due, od una di queste, colla equazione (VIII) del piano tangente, esprimono la individuata retta della rigata a generatrice normale alla inviluppata dell'anulare; la quale passa pel centro della individuata circonferenza generatrice dell' anulare il di cui piano tocca la direttrice del suo cono direttore nel punto delle coordinate β, $f(\beta)$, $f_1(\beta)$, ed appartiene alla individuata superficie a generatrice normale a quella della individuata inviluppata rigata, che corrisponde alla caratteristica i di cui punti hanno la distanza angolare di tangente trigonometrica τ dalla curva di contatto dell'anulare colla sua rigata determinatrice (21).

II.

37. Per ottenere queste ultime equazioni più accorciate, applichiamo anche quì le cose dette nei N. 17, 18 e 19. Otterremo immediatamente

$$\text{(XLV)}\quad \begin{cases} \dfrac{x-P-\delta(C_y\,c_z-C_z\,c_y)}{z-R-\delta(C_x\,c_y-C_y\,c_x)}=\dfrac{c_x+\tau(C_y\,c_z-C_z\,c_y)}{c_z+\tau(C_x\,c_y-C_y\,c_x)} \\[2ex] \dfrac{y-Q-\delta(C_z\,c_x-C_x\,c_z)}{z-R-\delta(C_x\,c_y-C_y\,c_x)}=\dfrac{c_y+\tau(C_z\,c_x-C_x\,c_z)}{c_z+\tau(C_x\,c_y-C_y\,c_x)} \end{cases}$$

le quali o insieme, o ciascuna coll' altra

$$C_x\,x+C_y\,y+C_z\,z=0$$

esprimono la individuata retta della individuata rigata a generatrice normale a quella della inviluppata.

CAPO SECONDO

DELLE ANULARI DI QUINTA CLASSE.

I.

38. Come abbiamo dichiarato innanzi (1), nelle anulari di Quinta Classe la rigata determinatrice è *non sviluppabile* : e dato il cono direttore dell' anulare, essa è determinata, data che sia una curva soltanto, alla quale le sue rette debbono appoggiarsi. Imperciocchè se immaginiamo che per un punto del cono direttore sia menato ad esso il piano tangente, un tal piano taglierà la data curva direttrice della rigata in un punto; e per un tal punto, se intendiamo menata una retta perpendicolare al lato di contatto del piano col cono, una tal retta è retta della rigata determinatrice dell' anulare. Dunque dato il cono direttore dell' anulare; la rigata determinatrice è determinata, data che sia una curva soltanto alla quale debbono appoggiarsi le sue rette.

39. Siano

$$\text{(XLVI)} \qquad \begin{cases} y=F(x) \\ z=F_1(x) \end{cases}$$

le equazioni della data curva direttrice della rigata determinatrice.

E meniamo il piano tangente al cono direttore dell' anulare, per quel suo lato che passa per quell' individuato punto della direttrice di esso cono, le di cui coordinate (3) sono β, $f\beta)$, $f_1(\beta)$. La equazione di un tal piano (10) è la (VIII)

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0.$$

Questo piano, incontrando la curva direttrice della rigata determinatrice dell' anulare, rappresentata dalle equazioni (XLVI) avrà luogo l' altra equazione

$$\text{(XLVII)} \qquad (ff_1'-f'f)x+(f_1-\beta f_1')F(x)-(f-\beta f')F_1(x)=0;$$

perciocchè per l' incontro del piano colla curva, le coordinate di questa debbono soddisfare alla equazione del piano.

E pertanto risoluta l' ultima equazione rispetto ad x, avremo l' ascissa del punto, ove la curva direttrice della rigata determinatrice è incontrata dal piano che tocca il cono direttore dell' anulare lungo il suo lato che passa pel punto dell' ascissa β della curva direttrice di esso cono.

Sia risoluta rispetto ad x l'ultima equazione; e sia θ il valore effettivo ottenutone per x: il quale valore θ, come è evidente, è una funzione composta delle β, f, f_1 e delle derivate di queste due ultime; ossia è una funzione implicita di essa medesima β. E saranno le coordinate del punto della direttrice, ove è incontrata dal piano tangente (VIII) al cono direttore dell' anulare le tre

$$\theta\,,\ F(\theta)\,,\ F_1(\theta).$$

40. Ora per questo punto della direttrice della rigata determinatrice, meniamo un piano normale alla retta (II)

$$\begin{cases} \beta y - fx = 0 \\ \beta z - f_1 x = 0 \end{cases}$$

del cono direttore, la quale (3) passa per l' individuato punto di ascissa β della direttrice sua, e che è retta di contatto di esso cono col piano ad esso tangente (10); il quale piano incontra la curva direttrice della rigata determinatrice nel punto di ascissa θ (39). È la equazione di un tal piano normale, la

$$\text{(XLVIII)} \qquad \beta x + fy + f_1 z - (\beta\theta + fF + f_1 F_1) = 0$$

E le due (38)

$$\text{(XLIX)} \qquad \begin{cases} \beta x + fy + f_1 z - (\beta\theta + fF + f_1 F_1) = 0 \\ (ff_1' - f'f)x + (f_1 - \beta f_1')y - (f - \beta f')z = 0 \end{cases}$$

sono quelle della retta della rigata determinatrice di un' anulare di quinta classe, la quale retta tocca quella circonferenza dell' anulare, il di cui piano tocca la curva direttrice del suo cono direttore, di equazioni (I)

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f_1(x)\,, \end{cases}$$

nel suo punto di ascissa β.

Ma d'altronde, da ciò che abbiam detto ai N. 4, e 10, risulta che le equazioni

$$\text{(L)} \qquad \begin{cases} f(\beta x+fy+f_1z)-(\beta^2+f^2+f_1^2)\omega=0 \\ (ff_1'-f'f_1)x+(f'-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0 \end{cases}$$

sono le equazioni di una retta della rigata determinatrice di un'anulare qualunque a cono direttore, corrispondente a quella sua circonferenza generatrice, il di cui piano tocca il cono direttore lungo la medesima retta (II)

$$\begin{cases} \beta y-fx=0 \\ \beta z-f_1x=0 \end{cases}$$

la quale passa pel medesimo punto di ascissa β della curva direttrice di esso cono.

Dunque perchè la retta data dalle equazioni (L) appartenga non alla rigata determinatrice di un' *anulare qualunque a cono direttore*, ma a quella di un' *anulare a cono direttore di quinta classe*, è necessario che le equazioni (L) siano identiche alle (XLIX); perciocchè in un tal caso la retta che le equazioni (L) rappresentano, e che appartiene alla determinatrice di un' anulare qualunque a cono direttore, si confonde colla retta rappresentata dalle equazioni (XLIX), la quale appartiene alla determinatrice di un' anulare *parimenti a cono direttore, ma che è di quinta classe*: e la quale determinatrice ha per curva direttrice quella delle equazioni (XLVI), e pel di cui punto di coordinate θ, $F(\theta)$, $F_1(\theta)$ passa (40) essa individuata sua retta di equazioni (XLIX), nelle quali θ è la funzione implicita della β che si cava dalla (XLVII), quando è risoluta rispetto ad x.

Ora perchè le equazioni (L), siano identiche alle equazioni (XLIX) è necessario che sia

$$\text{(LI)} \qquad \frac{1}{f_1}(\beta^2+f^2+f_1^2)\omega=\beta\theta+fF+f_1F_1$$

Dunque quando l' anulare a cono direttore è di quinta classe, l' ordinata ω del punto della retta $\begin{cases} \beta y-fx=0 \\ \beta z-f_1x=0 \end{cases}$, pel quale passa la

retta della rigata determinatrice, che tocca la circonferenza dell'anulare di piano tangente al cono direttore secondo essa retta, non può essere assunta ad arbitrio, come abbiam fatto al N. 4, ma debbe essere

$$(\text{LII}) \qquad \alpha = \frac{(\beta\theta + fF + f_1F_1)f_1}{\beta + f^2 + f_1^2}.$$

Conformemente dunque a ciò che dichiarammo fin da principio, cioè al N. 2, se nelle precedenti trovate espressioni invece di α vi porremo questo suo valore, verremo ad introdurre in esse la condizione, che le rette della rigata determinatrice non solo sono ciascuna perpendicolare al lato di contatto del cono direttore col piano della circonferenza mobile che genera l'anulare, ma che in oltre incontrano ciascuna una curva, che non tutte toccano: e senza che passino tutte per un medesimo punto. E però verremo ad ottenere le espressioni delle cose appartenenti alle *anulari di quinta classe soltanto.*

Ma prima di porre questo valore di α in esse espressioni, è bene fermarci alquanto a considerarne gli elementi.

II.

41. La espressione di α competente alle anulari di quinta classe, essendo della forma (LII)

$$\alpha = \frac{(\beta\theta + fF + f_1F_1)f_1}{\beta^2 + f^2 + f_1^2}$$

è una funzione implicita della β soltanto. Difatto per le equazioni (I)

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f_1(x) \end{cases}$$

della curva direttrice del cono direttore dell'anulare (3), sono note le forme delle funzioni f, f_1 di x, e quindi anche le $f(\beta)$, $f_1(\beta)$ che entrano in essa espressione: dalle equazioni (XLVI)

$$\begin{cases} y = F(x) \\ z = F_1(x) \end{cases}$$

della curva direttrice della rigata determinatrice dell' anulare, conosciamo le forme delle funzioni F, F_1 di x: dalla (XLVII)

$$(ff_1'-f'f_1)\theta+(f_1-\beta f_1')F(\theta)-(f-\beta f')F_1(\theta)=0$$

conosciamo quale funzione è θ di β, contenuta anche in f, f_1, f', f_1': e noto θ, per le medesime note forme di F, F_1, conosciamo in fine le forme delle funzioni composte

$$F(\theta(\beta)),\ F_1(\theta(\beta)).$$

La ϖ dunque è una funzione della sola β, ma non pertanto il suo valore dipende dalle forme delle quattro funzioni f, f_1, F, F_1: tutte e quattro le quali funzioni possono d' altronde assumersi ad arbitrio; perciocchè possiamo assumere come a noi piace la curva direttrice del cono direttore, e la curva direttrice della rigata determinatrice. Dunque, in generale, la ϖ è funzione della sola β, ma il suo valore *dipende da quattro funzioni arbitrarie*.

42. Supponiamo date queste curve direttrici delle assunte equazioni (II), e (XLVI) del cono direttore, e della rigata determinatrice. Pei noti metodi potremo costruire esso cono direttore, ed anche la rigata determinatrice: ovvero determinarne le equazioni. E potremo ancora costruire la intersezione di esse superficie con un piano qualunque, per esempio con un piano orizzontale, od anche parallelo all' assunto piano coordinato xy. Queste curve d'intersezione essendo sur esse superficie, potremo sostituire tali curve alle assunte direttrici del cono direttore e della rigata determinatrice. E così facendo, le funzioni f_1, F_1 saranno sostituite da due quantità costanti, ciascuna uguale alla distanza dal piano xy dei piani che tagliano essi cono e rigata determinatrice: anzi potrebbero queste due costanti essere uguali.

Il valore di ϖ dunque dipende in generale da quattro funzioni arbitrarie (41), ma che *possono ridursi ancora a due.* E per semplicità a due le ridurremo; ed anche indipendentemente dalle due costanti, od anche da una sola da surrogare le f_1, F_1.

43. Costrutte le due superficie del cono direttore, e della rigata determinatrice, potremmo costruire la curva di loro intersezione: ovvero determinarne le equazioni. E per le cose preceden-

temente dette possiamo sempre determinare le coordinate di un individuato punto di questa curva d' intersezione, corrispondente alla retta del cono direttore che passa pel punto di coordinate $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$ della sua curva direttrice, ed alla corrispondente retta della rigata determinatrice che passa pel corrispondente punto di coordinate θ, $F(\theta)$, $F_1(\theta)$ della sua curva direttrice.

E di fatto da ciò dicemmo al N. 4, sono coordinate di esso punto della detta curva d' intersezione le tre

$$\frac{\beta\omega}{f}, \frac{\beta\omega}{f_1}, \omega$$

per una anulare qualunque a cono direttore; e quindi pel detto nel N. 40 sono

$$\frac{\beta(\beta\theta+fF+f_1F_1)f_1}{f(\beta^2+f^2+f_1^2)}, \frac{\beta(\beta\theta+fF+f_1F_1)}{\beta^2+f^2+f_1^2}, \frac{(\beta\theta+fF+f_1F_1)f_1}{\beta^2+f^2+f_1^2}.$$

le coordinate di esso medesimo punto della detta curva d' intersezione per un' anulare a cono direttore di quinta classe.

Senza dunque costruire di fatto il cono direttore, e la rigata determinatrice, od anche senza trovarne le rispettive equazioni, date che siano, nel modo più generale, le equazioni

$$\begin{cases} y=f(x), \\ z=f_1(x), \end{cases} \begin{cases} y=F(x) \\ z=F_1(x) \end{cases}$$

delle rispettive curve direttrici del cono direttore, e della rigata determinatrice, potremo ottenere immediatamente le equazioni della curva d' intersezione di essi cono e rigata determinatrice, ponendo

$$\text{(LIII)} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{[x\theta(x)+f(x)F(\theta(x))+f_1(x)F_1(\theta(x))]x}{(x)^2+f(x)^2+f_1(x)^2} \\ z=\dfrac{[x\theta(x)+f(x)F(\theta(x))+f_1(x)F_1(\theta(x))]f_1(x)}{(x)^2+f(x)^2+f_1(x)^2} \end{cases}$$

Pertanto la curva d' intersezione del cono direttore colla rigata determinatrice giacendo sul cono, ed anche sulla rigata, può essa

essere ad un tempo direttrice del cono e della rigata. Nè toglieremmo nulla alla generalità dei ragionamenti, se assumessimo di fatto essa curva per direttrice delle due superficie direttrice e determinatrice dell' anulare; perciocchè abbiamo quì veduto, come date le equazioni effettive della curva a doppia curvatura direttrice di ciascuna, possano immediatamente trovarsi quelle della curva d' intersezione del cono direttore colla rigata determinatrice, senza punto costruire o trovare le equazioni di queste medesime superficie. Possiamo dunque, come abbiamo assunto, per semplicità, ridurre a due le quattro funzioni arbitrarie f, f_1, F, F_1, dalle quali dipende il valore di ω (41), ed anche indipendentemente dall' una o dalle due costanti da rimpiazzare le f_1, F_1, (42).

44. Siano dunque

$$\text{(LIV)} \qquad \begin{cases} y=f(x) \\ z=f_1(x) \end{cases}$$

non più le equazioni di una curva qualunque nello spazio, direttrice del cono direttore dell' anulare che (3) chiamammo (II), ma siano esse le equazioni di quella curva, intersezione comune del cono direttore, e della rigata determinatrice, la quale è direttrice comune di quello e di questa: siano cioè questi valori di y e z dati per $f(x)$, $f_1(x)$ li medesimi identici di quelli di y e z dati dalle equazioni (LIII), entrambi per lo stesso valore di x.

Tutti i ragionamenti fatti innanzi reggeranno del pari: tutte le trovate espressioni staranno: e solo in quanto alle anulari di quinta classe, la funzione F sarà identica alla f, e l' altra F_1 identica alla f_1: ed il punto nel quale questa nuova direttrice comune al cono direttore ed alla rigata determinatrice, è incontrata dalle rette di quello e di questa, giacenti sul piano di una medesima individuata circonferenza generatrice dell' anulare, avrà una sola e medesima ascissa; perocchè un solo e medesimo è esso punto d' incontro.

Così assunte dunque le equazioni

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=f_1(x) \end{cases}$$

sarà

$$\beta=\theta\,,\ f=F\,,\ f_1=F_1$$

nella espressione (LII) di α appartenente alle anulari di quinta classe ; nè punto sarà menomata la generalità del discorso, dando alle funzioni $f(x)$, $f_1(x)$ questo nuovo significato ; perciocchè pel detto nel N. 43, possiamo sempre determinare le forme delle funzioni f, f_1 perchè abbiano il nuovo significato, date che ne siano le forme nel senso di curva direttrice qualunque del cono direttore, e date che siano le forme delle funzioni F, F_1, appartenenti a generatrice qualunque della rigata determinatrice.

Siano dunque (LIV)

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=f_1(x) \end{cases}$$

le equazioni della curva direttrice comune del cono direttore e della rigata determinatrice di un' anulare di quinta classe, sarà (40)

$$\text{(LV)} \qquad \alpha=\frac{(\beta\beta+ff+f_1f_1)f_1}{\beta^2+f^2+f_1^2}\text{, ossia } \alpha=f_1\,.$$

E poichè per la distanza $\dfrac{\omega D}{f_1}-\alpha$ ponemmo (12) la Δ, talchè debbesi avere

$$\text{(LVI)} \qquad \Delta=\frac{\omega D}{f_1}-\alpha$$

ne segue che per le anulari di quinta classe sarà (12)

$$\Delta=D-\alpha=\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}-\alpha$$

Ed è chiaro che sostituito questo volore di Δ nelle espressioni trovate al Capo Primo, otterremo le analoghe appartenenti *non più ad una anulare qualunque a Cono Direttore*, ma invece *ad una qualunque di quelle di Quinta Classe.*

ARTICOLO I.

Espressione dell' anulare generale di Quinta Classe.

I.

45. Per ottenere la espressione di un' anulare di quinta classe, cominciamo dal trovare quella di una individuata circonferenza di essa medesima anulare. E per ciò fare, come or ora abbiamo detto (44), poniamo nella (XX) invece di Δ il binomio $\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}-\alpha$.

Dopo le diverse riduzioni che si presentano, ottenghiamo

(LVII)

$$\left(2\alpha\beta+(x-\beta)\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}\right)(x-\beta)R-2\delta\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)x$$
$$+\left(2\alpha f+(y-f)\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}\right)(y-f)R-2\delta\left(\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'+f_1^3\left(\frac{f}{f_1}\right)'\right)y$$
$$+\left(2\alpha f_1+(z-f_1)\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}\right)(z-f_1)R-2\delta\left(\beta^3\left(\frac{f_1}{\beta}\right)'+f^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'\right)z$$
$$+\delta^2 R\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}=0$$

$$f^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'x+f_1\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'y+\beta^2\left(\frac{f}{\beta}\right)'z=0.$$

E sono queste le espressioni analitiche di una individuata circonferenza generatrice dell' anulare di quinta classe. Epperò le coordinate x, y, z che da esse equazioni vengon date, sono le coordinate di un punto di essa superficie anulare, ma che giace sulla individuata circonferenza di essa medesima anulare, la quale è rappresentata da esse equazioni.

46. Per un momento la x delle equazioni (LVII) abbia un determinato valore. Risulteranno valori determinati per y, z: ed esse equazioni (LVII) rappresenteranno un determinato punto della individuata circonferenza dell'anulare: e perciò un determinato punto dell' anulare medesima.

Vogliasi ora passare da quel determinato punto ad un altro della circonferenza individuata. La x dovrà assumere un' altro determinato valore, e risulterà un altro determinato valore tanto per y, quanto per z. Ma la quantità β, che determina la posizione del piano della individuata circonferenza (3, 10), debbe ritenere il medesimo valore, ed il medesimo valore dovrà ritenere la α che ne determina il raggio, e la δ che colla α ne determinano la posizione del centro (9, 11); perciocchè se queste quantità β, δ, α variassero, il secondo punto da determinarsi non starebbe sulla medesima individuata circonferenza sulla quale era il primo, ma da essa uscirebbe; esprimendo allora quelle equazioni circonferenza diversa di posizione, e di diverso raggio della individuata, e perciò non più questa medesima. Dunque le x, y, z, delle equazioni (LVII) possono variare indipendentemente dalle β, δ, α in esse medesime equazioni contenute: nè queste debbono variare pel variare di quelle: e ritenendo il medesimo valore la β, il medesimo primiero ritengono ancora le δ, α.

Vogliasi ora, in vece, da quel primo determinato punto, corrispondente al determinato valore della x, passare ad un'altro punto dell' anulare, che non più stia sulla individuata circonferenza, ma che stia invece sur un' altra circonferenza dell' anulare medesima. In questo secondo caso la x potrebbe ritenere il primo determinato valore; ma la β, la δ, e la α, dovranno necessariamente variare, senza di che il secondo punto non uscirebbe dalla primiera individuata circonferenza. Dunque le β, δ, α, non solo ritengono insieme il medesimo primiero valore, come abbiamo conchiuso di sopra, ma variano insieme; e senza che debbano però variare le x, y, z.

Se dunque facessimo astrazione da quella individuata circonferenza generatrice dell' anulare contemplata innanzi; e riguardassimo invece le x, y, z da esse due equazioni (LVII) date, come riferentisi non ad essa individuata circonferenza dell' anulare, ma come appartenenti invece ad una qualunque di tutte quelle che sur essa anulare sono, ovvero come riferentisi ad un punto qualunque di essa medesima anulare, dovremmo considerare la β, non più come avente un valore costante, ma come avente tutti gl' immagi-

nabili valori che possono ad essa competere; e quindi le δ, α, che variano insieme con essa, dovremmo considerare come funzioni di essa medesima β.

Ora la equazione

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0\,,$$

ovvero la seconda delle (LVII), che l'è equivalente, dà appunto tutti gl'immaginabili valori che possono competere alla β, corrispondentemente a qualunque immaginabile valore delle x, y, z, ossia a qualunque punto immaginabile dell'anulare; perciocchè tutte le circonferenze di questa sono sempre (11) su qualche piano degli infiniti rappresentati dalla equazione (VIII)

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0$$

(10), quando la β v'è variabile: dunque se risolvessimo questa equazione (VIII) rispetto a β, e ne ponessimo il valore risultante nella prima delle equazioni (LVII); e ad un tempo ponessimo in questa in vece di δ, α, le funzioni ch'esse sono di β, la risultante equazione sarebbe l'espressione analitica delle anulari di quinta classe.

47. Assumiamo come note le forme delle funzioni f, f_1, della β nel senso detto al N.° 44, e perciò come date dalle equazioni (LIV); ed assumiamo come risoluta rispetto a β la (VIII)

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0\,,$$

o l'altra ad essa equivalente

$$f^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'x+f_1^2\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'y+\beta^2\left(\frac{f}{\beta}\right)'z=0\,,$$

dopo avervi per f, f_1, poste le date funzioni esplicite $f(\beta)$, $f_1(\beta)$ che nel senso detto al N.° 44 esse sono della β. E siane risultato

$$\beta=\varphi(x,y,z).$$

Per ciò che abbiamo detto nel N.° precedente, essendo non solo f, f_1 funzioni della β, ma ancora le δ, α funzioni della

medesima β, sarà

$$f=f(\varphi(x,y,z))$$
$$f_1=f_1(\varphi(x,y,z))$$
$$\delta=f_2(\varphi(x,y,z))$$
$$\alpha=f_3(\varphi(x,y,z)).$$

Nelle quali f, f_1 sono funzioni della φ della stessa forma che sono f, f_1 della β, date dalle equazioni (LIV); ed f_2, f_3 sono funzioni della φ di forma in generale diversa da quella che sono le f, f_1 della β. E se supporremo sostituita di fatto in f, f_1, f_2, f_3, quella funzione che è la φ delle x, y, z, potremo più semplicemente porre

$$\text{(LVIII)} \quad \begin{aligned} \beta &= \varphi(x,y,z) \\ f &= f(\varphi)=\varphi_1(x,y,z) \\ f_1 &= f_1(\varphi)=\varphi_2(x,y,z) \\ \delta &= f_2(\varphi)=\varphi_3(x,y,z) \\ \alpha &= f_3(\varphi)=\varphi_4(x,y,z) \end{aligned}$$

48. Se sostituiremo dunque queste espressioni nella prima delle (LVII), otterremo la espressione cercata dell' anulare generale di quinta classe. Ed è

(LIX)

$$\left(2\varphi\,\varphi_4+(x-\varphi)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)(x-\varphi)\rho-2\varphi_3\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)x$$
$$+\left(2\varphi_1\varphi_4+(y-\varphi_1)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)(y-\varphi_1)\rho-2\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)y$$
$$+\left(2\varphi_2\varphi_4+(z-\varphi_2)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)(z-\varphi_2)\rho-2\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)z$$
$$+\varphi_3^2\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=0.$$

Nella quale sono x, y, z le tre coordinate riferite a tre assi ortogonali, la di cui origine è nel vertice del cono direttore dell' anulare, φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 cinque funzioni di esse coordinate x, y, z da determinarsi, e ρ rappresenta ciò che diventa il polinomio R, quando in luogo delle β, $f(\beta)$, $f_1(\beta)$ vi sostituiamo le espressioni (LVIII), dopo avervi generalizzate le derivate: esiste dunque (XIII)

la relazione

$$\text{(LX)} \qquad \rho=\sqrt{\left(\varphi^2\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'\right)^2+\left(\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)^2+\left(\varphi_2^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)^2}$$

49. Abbiamo veduto (47) che la funzione $\varphi(x, y, z)$ si ottiene dalla risoluzione della

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0\,,$$

rispetto a β; ma dopo avervi messo per f, f_1 le funzioni effettive che esse sono della β. Ora ritenghiamo rimesso in questa equazione il valore $\varphi(x, y, z)$ ottenutone per β. Per una tal sostituzione (LVIII) le f, f_1 diventeranno $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$, ed essa equazione sarà verificata. Avrà luogo dunque la equazione di condizione

$$\text{(LXI)} \qquad \varphi^2\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'z+\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'x+\varphi_2^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'y=0$$

che sarà identica. E però in generale delle cinque funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, quattro sono arbitrarie, ovvero possono determinarsi dalla definizione dell' anulare di quinta classe particolare, tra le quali sono sempre le φ_3, φ_4; e l' altra dipende dalle altre due di quelle quattro: e di esse le φ_3, φ_4 sono arbitrarie ed indipendenti, e le altre tre φ, φ_1, φ_2, sono ligate tra loro dalla relazione (LXI), onde due sole di esse sono arbitrarie.

Riavvicinando dunque tutto ciò, a quel che dicemmo ai N.[i] 41, 42, 43, conchiuderemo il seguente

Teorema. *La espressione analitica la più generale delle anulari di Quinta Classe si presenta composta da sette funzioni delle tre coordinate, delle quali sei sono arbitrarie: e queste sei possono sempre ridursi a quattro. Però la più semplice espressione dell' anulare di quinta classe ha quattro funzioni arbitrarie.*

50. Per abbracciare implicitamente la relazione (LXI), che esiste tra le tre funzioni φ, φ_1, φ_2, basterebbe per essa eliminare dalla espressione (LIX) la funzione φ. Allora essa espressione conterrebbe le sole funzioni arbitrarie φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, tutte indipen-

denti tra loro, e da determinarsi per condizioni che definiscono l'anulare particolare di quinta classe. Ma non occorre che ciò si faccia, perciocchè la espressione ne verrebbe soverchiamente complicata: e d'altronde basta ciò che abbiam dichiarato in ordine ad esse funzioni.

II.

51. Abbiam detto (49) che le cinque funzioni comprese nella espressione (LIX) potrebbero ridursi ad esser quattro soltanto; e che queste sono arbitrarie ed indipendenti. Possiamo dunque supporre che una di esse ritenga sempre la medesima forma, e che le altre vadano prendendo tutte le diverse possibili. Tutte le anulari allora, che saranno rappresentate dalla espressione (LIX), avranno una proprietà comune, espressa in quella funzione, che abbiam supposta ritenere sempre una medesima forma. Dunque potremo dire ammettere le anulari di quinta Classe tanti generi, quante sono le forme diverse che può avere una di esse funzioni, che assumiamo sia la φ_2.

Ritenga ora φ_2 la medesima forma. Potrà sempre la medesima forma ritenere ancora la φ_3; e variare comunque la φ_4. E tutte le anulari rappresentate dalla espressione (LIX), avranno non solo in comune quella proprietà espressa dalla funzione φ_2, ma ancora in comune una seconda proprietà espressa dalla forma della funzione φ_3. Dunque potremo enunciare che tutte le anulari di un medesimo genere sono di tante specie per quante sono le forme diverse che può avere la funzione φ_3. E se rifletteremo che in sostanza φ_3 stà (47) per le distanze δ del centro della circonferenza dell'anulare in ogni sua posizione (10) dal lato del cono direttore secondo il quale tocca il suo piano, potremo ancora enunciare che le anulari di quinta classe di un medesimo genere sono di una medesima specie, quando la legge del variare delle distanze del centro della sua circonferenza generatrice dal lato di contatto del suo piano col cono direttore si mantiene la stessa: e che però quelle di un medesimo genere potranno essere di tante specie per quanto in diverso modo potrà immaginarsi essa legge.

Ritenga la $\varphi 4$ pure la medesima forma, mentre la medesima forma ritengono le φ_2, $\varphi 3$. Una terza proprietà comune avranno tutte le anulari rappresentate dalla espressione (LIX); e però tutte quelle di una medesima specie potranno essere di tante varietà per quante possono essere le forme diverse della funzione $\varphi 4$. E poichè $\varphi 4$ stà (47) per la distanza α del centro della circonferenza dell' anulare in ogni sua posizione (9) dalla retta della rigata determinatrice che è sul suo piano, potremo enunciare che le anulari di una stessa specie sono di una medesima varietà, quando la legge del variare della distanza del centro della circonferenza generatrice dell' anulare dalla retta della rigata determinatrice che è sul suo piano si mantiene la stessa: e che però potranno essere di tante varietà per quanta diversa di maniera potrà immaginarsi essa legge.

Fin ora abbiamo supposto ritenere successivamente lo stesso valore le funzioni φ_2, $\varphi 3$, $\varphi 4$; e nulla abbiamo detto della funzione φ_1. Ma è chiaro che mentre la φ_2 va prendendo tutte le forme possibili, la φ_1 potrebbe ritenere sempre la medesima forma; e che però le anulari di quinta classe di tutti gl' immaginabili generi, potrebbero avere insieme una sola e medesima proprietà corrispondente alla individuata forma della φ_1. Dunque tutte le anulari di quinta classe possono essere classificate in Gruppi diversi; e tanti essi saranno, per quante sono le forme diverse che può prendere la funzione φ_1. Ciascuno dei quali gruppi poi potrà contenerne di tanti generi per quante sono le possibili forme che può avere la funzione φ_2.

E conchiuderemo da tutto ciò, che le anulari di Quinta Classe vanno distinte in gruppi; quelle di un medesimo gruppo in genere; quelle di un medesimo genere in ispecie; e quelle di una stessa specie in varietà. E che potremo specificare il gruppo soltanto dando una forma determinata alla sola $\varphi_1(x, y, z)$; potremo specificare il gruppo ed il genere, dando la corrispondente forma determinata alla $\varphi_1(x, y, z)$, ed anche alla $\varphi_2(x, y, z)$; il gruppo il genere e la specie dando la corrispondente forma determinata alla φ_1, φ_2, e $\varphi 3(x, y, z)$; e potremo specificare il gruppo, il genere la specie ed anche la varietà, dando la forma corrispondente a tutte quattro le funzioni φ_1, φ_2, $\varphi 3$, $\varphi 4$.

Queste funzioni potranno avere forme diverse ; e si comporranno cosiffatte forme non solo dalle variabili o coordinate x, y, z, ma ancora da quantità costanti per ciascun' anulare , che saranno i *parametri* di essa : ed è chiaro , che senza cambiare le forme delle funzioni , potranno variare certe relazioni tra esse costanti. Di quì le sotto varietà. E quindi ancora la varia grandezza dell' anulare , secondo che varia la grandezza dell' una o dell'altra di esse costanti , o di tutte.

Parimenti potrebbero ritenere certe individuate forme le φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 ; ed inoltre esistere certe relazioni, o dipendenze tra loro, le quali relazioni o dipendenze potranno essere diverse , comunque rimangano le medesime quelle individuate forme. Allora nasceranno tante famiglie per quante sono quelle relazioni o dipendenze. E poichè, quantunque variassero le forme delle funzioni φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, pure potrebbero tra loro ritenere esse medesime relazioni o dipendenze ; avremmo in questo caso , per tutti i gruppi , generi , specie e varietà alle quali si riferiscono esse forme delle funzioni φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, delle famiglie di ugual nome, ossia di un medesimo stipite, come, nel progresso , di fatto vedremo.

ARTICOLO II.

Espressione della Caratteristica dell'anulare generale di Quinta Classe.

I.

52. Dopo ciò che abbiamo fin quì detto nel presente capitolo, è facile il trovare la espressione della caratteristica dell' anulare generale di Quinta Classe.

Cominciamo dal trovare quella di un' individuato punto di essa caratteristica ; e perciò (44) poniamo $\Delta=\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}-\alpha$ nelle (XXX) , che rappresentano (24) quel punto di una individuata circonferenza di un' anulare qualunque a cono direttore , il quale appartiene a quella caratteristica ch' è individuata per un valore particolare della τ.

Fatta la sostituzione, la prima e la terza delle (XXX) si trasformeranno nelle medesime (LVII); e la seconda nella

(LXII)

$$(x-\beta)\beta+(y-f)f+(z-f_1)f_1+\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)\varkappa\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}=0$$

E questa insieme colle (LVII) rappresentano un' individuato punto di una individuata caratteristica, *non più* di un' anulare qualunque a cono direttore, ma di *una di quelle di quinta classe.*

53. Per dedurne la espressione, non più di un individuato punto di una individuata caratteristica, ma di questa tutta intera, poniamo (47) in esse medesime espressioni (LVII) e (LXII) per β la $\varphi(x,y,z)$, per $f(\beta)$ la $\varphi_1(x,y,z)$, per $f_1(\beta)$ la $\varphi_2(x,y,z)$. Verremo così, per ragionamenti analoghi a quelli fatti al N.° 46, a considerare non quell' individuato punto della caratteristica, che appartiene alla circonferenza dell' anulare, ch' è individuata per un particolare valore della β; ma ad abbracciare ad un tempo tutti i punti della caratteristica appartenenti alla universalità delle circonferenze dell' anulare; perciocchè per essa sostituzione vengono ad abbracciarsi, come ampiamente dimostrammo (46, 47), tutt' i possibili valori della β, che sono quelli dati dalla (VIII) risoluta rispetto a β, quando vi si ritengano le x, y, z come variabili. E poichè la seconda delle (LVII), per le dette sostituzioni, si trasforma nella (LXI) ch' è identica, verificandosi da sè (49), basta ritenere la prima di esse (LVII), e la (LXII). E pertanto otteghiamo per espressione della caratteristica,

(LXIII)

$$\left(2\varphi\,\varphi_4+(x-\varphi)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)(x-\varphi)\rho-2\varphi_3\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)x$$

$$+\left(2\varphi_1\varphi_4+(y-\varphi_1)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)(y-\varphi_1)\rho-2\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)y$$

$$+\left(2\varphi_2\varphi_4+(z-\varphi_2)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)(z-\varphi_2)\rho-2\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)z$$

$$+\varphi_3^2\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=0$$

$$(x-\varphi)\varphi+(y-\varphi_1)\varphi_1+(z-\varphi_2)\varphi_2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)\varphi_4\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=0$$

Quì le x, y, z, sono le coordinate della caratteristica riferite a tre assi coordinati ortogonali colla origine nel vertice del cono direttore (3), la τ è il parametro di posizione che determina ciascuna diversa caratteristica su di una medesima anulare (21), e le φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sono delle funzioni delle coordinate, delle quali quattro arbitrarie; cioè le φ_3, φ_4, e due delle φ, φ_1, φ_2, essendo queste ultime ligate tra loro dalla relazione (LXI), e la ρ vi stà pel radicale (LX).

E se si osservi che la seconda delle (LXIII) non contiene punto la funzione di specie (51) φ_3; e che d'altronde essa rappresenta una superficie, la quale sarà però sempre la stessa di natura qualunque sia la forma della φ_3, tanto solo che le $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$, vi abbiano la medesima forma, potrà inferirsene il seguente

Teorema. *Le anulari tutte di quinta classe, di qualunque specie sieno, purchè appartengano alle famiglie di un medesimo stipite di varietà* (51), *e ad un medesimo genere di un medesimo gruppo, hanno le loro caratteristiche, corrispondenti ad un medesimo parametro di posizione, allogate tutte in una sola e medesima superficie diversa dall' anulare alla quale appartengono.*

E la equazione di una tal superficie è espressa dalla seconda delle (LXIII).

II.

54. Essendo τ il parametro di posizione della caratteristica, è chiaro che otterremo la espressione di una individuata caratteristica particolare, tra quelle di una medesima anulare di quinta classe qualunque, dando a τ quel valore particolare che ad essa individuata caratteristica corrisponde.

E vogliasi in primo la caratteristica ch' è linea di contatto dell' anulare colla sua rigata determinatrice. Dovremo, per ciò ottenere, fare $A.\text{tang}.\tau = \text{zero}$, e quindi $\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} = 1$, essendo $\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$ il coseno generale dell' arco la di cui tangente è τ. Epperò, per essa linea di contatto, colla prima delle (LXIII) esisterà la

(LXIV) $$x\varphi+y\varphi_1+z\varphi_2=\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2$$

espressione indipendente non solo dalla φ_3, ma ancora dalla φ_4. Quindi il

Teorema. *Tutte le anulari di quinta classe, di uno stesso genere di un medesimo gruppo, e di qualunque specie o varietà sieno* (51), *hanno tutte la curva di loro contatto colla rispettiva rigata determinatrice allogata in una sola e medesima superficie diversa da ciascuna di esse.* Una tale superficie è espressa dalla (LXIV).

55. Vogliasi in secondo luogo la caratteristica, i di cui punti sono i più lontani dal cono direttore, ed anche l'altra i di cui punti sono i più vicini ad esso.

Ne otterremo le espressioni facendo nelle (LXIII) prima $A.\text{tang}.\tau=1^q$, e poi $A.\text{tang}.\tau=3^q$. In ambi i casi sarà cos.A.tang.τ, ossia $\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}=0$. Epperò per ambi i casi la seconda delle (LXIII) diventa

(LXV) $$x\varphi+y\varphi_1+z\varphi_2=\left(\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}-\varphi_4\right)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$$

Quindi il seguente

Teorema. *Nelle anulari di quinta classe le caratteristiche, la più lontana dal cono direttore e la più vicina ad esso, sono insieme sopra una sola e medesima superficie diversa dall'anulare alla quale appartengono.* Ed una tal superficie ha per espressione la (LXV).

Pertanto è osservabile che in quest' ultima espressione la φ_4 v'è conservata; ed a differenza di ciò che avviene nella (LXIV), che manca non solo della φ_3, ma ancora della φ_4. Ed è facile vedere che per qualunque altro valore della τ la φ_4 non mai sparisce dalla seconda delle (LXIII). La proprietà enunciata al N.° precedente dunque compete solo alla caratteristica linea di contatto dell'anulare colla sua rigata determinatrice.

Facendo $A.\text{tang}.\tau=2^q$, si otterrebbe la caratteristica in sublime dell' anulare, cioè la più vicina al vertice del cono direttore, e la seconda delle (LXIII) riterrebbe la φ_4, come abbiam detto.

ARTICOLO III.

Espressione della Inviluppata Rigata all' anulare generale di Quinta Classe.

I.

56. La (XLI) e la seconda delle (XL) esprimono insieme esplicitamente (32) una individuata retta della inviluppata rigata di un' anulare di quelle a cono direttore. E per fare che esprimano quella di una inviluppata di un' anulare, non qualunque a cono direttore, ma di un' anulare di quinta classe, dovremo farvi (44)

$$\Delta = \sqrt{(\beta^2 + f^2 + f_1^2)} - \alpha.$$

E se vorremo di poi, dalla trasformata che ne risulta, cavare la espressione, non più di una individuata retta della inviluppata, ma della inviluppata tutta intera, è chiaro, dopo il detto nei N. 46, 47, ed anche nel N.° 53, che dovremo invece della β, contenuta nella (XLI), porre il suo valore cavato dalla seconda delle (XL). Se dunque in primo moltiplichiamo tanto il numeratore, quanto il denominatore della (XLI) per DR; quindi, riuniti i termini che in ciascun membro moltiplicano R, generalizziamo le derivate; poi poniamo per Δ il binomio $\sqrt{(\beta^2 + f^2 + f_1^2)} - \alpha$; ed in fine per $\beta, f, f_1, \delta, \alpha$, scriviamo rispettivamente φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4; la risultante sarà la espressione della inviluppata rigata dell' anulare generale di quinta classe.

Fatte tutte cosiffatte operazioni; ed in oltre chiamato s il seno e c il coseno dell' arco la di cui tangente è τ, otteghiamo

$$\text{(LXVI)} \quad \frac{(\varphi_3 + s\varphi_1)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)' + \varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right) - \left(\varphi_4\varphi_1(1-c) + (y-\varphi_1)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)\rho}{(\varphi_3 + s\varphi_1)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)' + \varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right) - \left(\varphi_4\varphi_2(1-c) + (z-\varphi_2)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)\rho} =$$

$$\frac{\left\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)' + \varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' + \left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' + \varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'\right\} s\varphi_1^2 - \left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)' + \varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right) c\rho}{\left\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)' + \varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)' + \left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' + \varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right\} s\varphi_2^2 - \left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)' + \varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right) c\rho}$$

ove ρ sta, al solito, per ciò che diventa il radicale R quando vi facciamo le dette sostituzioni (LX); e nella quale le $x,y,z,\ \varphi,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\tau$ vi hanno il significato già dichiarato (53). E poichè l' inviluppata tocca sempre l' inviluppo lungo una sua caratteristica, è chiaro che la caratteristica dell' anulare stà ad un tempo sulla superficie (53) rappresentata dalla seconda delle (LXIII): nè queste due espressioni rappresentano una sola e medesima superficie, ma ne rappresentano due essenzialmente diverse; perocchè la prima dipende dalla φ_4 soltanto, quando che l' altra dipende ad un tempo dalla medesima φ_4 e dalla φ_3 ancora. E pertanto la seconda della (LXIII) e la (LXVI) simultaneamente considerate esprimono *in generale* pure la *caratteristica*.

II.

57. La (LXVI) esprime la inviluppata rigata generale di una anulare qualunque di quinta classe. Ne individueremo una particolare dando al parametro τ, ossia ad s e c, che ne tengono le veci, il corrispondente particolare valore.

Sia $A.\text{tang}.\tau=0$. La inviluppata sarà (1) la rigata determinatrice. In questo caso è $s=0$, e $c=1$. E la precedente (LXVI), sostituitivi per s e c tali valori, e liberata da fratti, porge

(LXVII)

$$\left\{(y-\varphi_1)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)\right)-(z-\varphi_2)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\right\}\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=0$$

Indipendente da φ_3 e da φ_4. Dunque il

Teorema. *Tutte le anulari di quinta classe, purchè siano di un medesimo gruppo e di un medesimo genere, ammettono una sola e medesima rigata determinatrice, di qualunque specie, varietà e grandezza esse siano* (51). Ond' è che data essa di natura, non resta determinata nè la specie nè la varietà dell'anulare, ma solo il genere col gruppo.

E poichè l' anulare tocca la sua rigata determinatrice secondo la sua caratteristica di parametro $A.\text{tang}.\tau=0$, ed essa determinatrice

ha le sue rette normali ciascuna a ciascuna di quelle del cono direttore, ne segue che su di una medesima superficie rigata a generatrici normali a quelle del cono direttore, sono le caratteristiche di un medesimo parametro di posizione $A.\mathrm{tang}.\tau=0$, di tutte le anulari di quinta classe di qualunque specie e varietà sieno, purchè appartengano ad un medesimo genere di un medesimo gruppo. Ma questa proprietà è analoga all'altra enunciata al N.54. Dunque tanto la superficie rappresentata dalla (LXIV), quanto la rappresentata dalla (LXVII), possono aversi come generate dalla linea di contatto dell' anulare di quinta classe colla sua rigata determinatrice, quando essa anulare non cessando di appartenere ad un medesimo genere di un medesimo gruppo và variando per tutte le specie e varietà possibili; ovvero sono entrambe il luogo di tutte esse linee di contatto. Però mentre le superficie generali rappresentate dalla seconda delle (LXIII) e dalla (LXVI) sono essenzialmente due diverse (56), nel caso del parametro di posizione $A.\mathrm{tang}.\tau=0$, debbono esse confondersi in una sola e medesima superficie; perciocchè, ove ciò non fosse, od una medesima curva genererebbe due superficie diverse, ovvero due superficie diverse sarebbero luogo di molte medesime linee, lo che è assurdo; oppure invece di tutte quelle linee di cui esse superficie diverse sarebbero luogo, dovrebbe esisterne una sola nella intersezione di esse medesime superficie; onde poi ne verrebbe che tutte le anulari di quinta classe, comunque di specie e varietà diverse, ammetterebbero *una sola e medesima* linea di contatto di esse colla rigata determinatrice, lo che è parimenti assurdo; perocchè egli è vero che per tutte esse anulari la determinatrice è la stessa, ma colla (LXVII) che n'è la espressione debbe necessariamente aver luogo la simultanea esistenza della prima delle (LXIII), e questa varia al variare delle φ_3, φ_4: onde debbe *necessariamente* variarne ancora la linea di loro scambievole incontro, ch' è per lo appunto quella di contatto dell' anulare colla sua rigata determinatrice (54).

58. Se faremo $A.\mathrm{tang}.\tau=1^q$, oppure $A.\mathrm{tang}.\tau=3^q$, avremo le inviluppate ad elementi paralleli a quelli del cono direttore: la più lontana da esso nel primo caso, la più vicina nel secondo. Ed

è facile il vedere che in ambi i casi la espressione della inviluppata ritiene ambe le funzioni φ_3, φ_4: e le ritiene eziandio per ogni altro valore del parametro τ, meno che nel caso di $A.\text{tang}.\tau=2q$. Sia di fatto $A.\text{tang}.\tau=2q$, sarà $s=0$, e $c=-1$. Sostituiti questi valori nella (LXVI), ne risulta (dopo liberatala da' fratti)

(LXVIII)

$$\left\{(y-\varphi)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)-(z-\varphi_2)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\right\}\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)}=$$
$$2\varphi_4\left\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\varphi_2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\varphi_1\right\}\rho$$

La quale espressione, come abbiamo enunciato, non più contiene la φ_3: ritiene solo la φ_4. Pertanto essa esprime la rigata inviluppata in sublime dell'anulare, cioè quella i di cui elementi sono i più vicini al vertice del cono direttore; ed anche paralleli a quelli della rigata determinatrice. Dunque il

Teorema. *Tutte le anulari di quinta classe, di un medesimo genere di uno stesso gruppo, mentre ammettono una medesima rigata determinatrice* (57), *non tutte ammettono del pari una medesima inviluppata ad elementi paralleli a quelli della determinatrice; ma saranno coteste inviluppate, tante di natura diversa per quante sono le varietà diverse competenti a ciascuna medesima specie di anulari.*

Intanto è osservabile che le (LXVII) e (LXVIII) hanno il primo membro con un fattore di ugual forma; e che questo per le rigate determinatrici è sempre zero, laddove per le inviluppate i di cui elementi sono paralleli a quelli della determinatrice, è invece uguale ad un multiplo della $2\varphi_4$, la quale, come è palese, è uguale alla distanza delle generatrici parallele di esse due rigate.

È poi utile osservare come la seconda delle (LXIII) e la (LXVI) dipendono dalle φ_3, φ_4. Quando $A.\text{tang}.\tau=0$, sono entrambe indipendenti (54, 57) da tutte e due esse funzioni φ_3, φ_4: quando $A.\text{tang}.\tau=2q$, entrambe dipendono dalla φ_4 e non dalla φ_3: per tutti gli altri valori dell'$A.\text{tang}.\tau$, la prima dipende dalla sola φ_4, e la seconda dipende e dalla φ_4, ed anche dalla φ_3.

ARTICOLO IV.

Espressione della Rigata a Generatrice Normale a quella della Inviluppata all' anulare generale di quinta classe.

I.

59. Per le cose dette nei N. 35 e 36 del Capo Primo; e per tutto ciò che abbiamo detto nei N. 45, 46, 47, ed anche 53 di questo, si fa manifesto, che otterremo la espressione della rigata a generatrice normale a quella della inviluppata dell'anulare generale di quinta classe, facendo nell'una o nell' altra delle (XLIV) le seguenti operazioni; cioè 1.° moltiplicando il numeratore ed il denominatore di ciascun membro per DR; 2.° ponendo per Δ il binomio $\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}-\alpha$; 3.° generalizzando le derivate; 4.° scrivendo in vece di $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$, rispettivamente $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, e per δ la φ_3, e per α la φ_4.

Per avere una certa relazione tra la espressione di questa superficie e la trovata (LXVI) della inviluppata, eseguiamo tutte le dette operazioni sulla seconda delle (XLIV). Ottenghiamo

(LXIX)

$$\frac{\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)-\left(\varphi_4\varphi_1+(y-\varphi_1)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)\rho}{\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)-\left(\varphi_4\varphi_2+(z-\varphi_2)\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2}\right)\rho}=\frac{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)s+c\varphi_1\rho}{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)s+c\varphi_2\rho}$$

ed è questa la espressione della rigata a generatrice normale a quella della inviluppata. In essa $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sono quattro funzioni arbitrarie delle x, y, z; φ è un'altra funzione di x, y, z non arbitraria indipendente, ma che dipende dalle due φ_1, φ_2 per la relazione (LXI); x, y, z sono le tre coordinate dei punti della superficie riferiti a tre assi ortogonali, la di cui origine è nel vertice del cono direttore dell' anulare; ed s e c sono il seno ed il coseno dell'arco la di cui tangente è τ, essendo τ il parametro di posizione dichiarato innanzi (21).

60. È manifesto che questa ultima espressione insieme colla (LXVI), simultaneamente considerate, rappresentano le linee medesime che le (LXIII); perciocchè per un medesimo parametro di posizione τ, la intersezione della inviluppata, colla rigata a generatrice normale alla sua, è per lo appunto la caratteristica dell'anulare inviluppo corrispondente all'individuato valore di τ. E però la caratteristica generale di un'anulare di quinta classe qualunque, inviluppo di superficie rigata, stà ad un tempo su quattro superficie diverse; cioè sull'anulare medesima, data dalla prima delle (LXIII), sulla sua inviluppata data dalla (LXVI), sulla rigata a generatrice normale a quella della inviluppata data dalla (LXIX), e sull'altra data dalla seconda delle (LXIII).

II.

61. Sia ora $A.\text{tang.}\tau=0$: sarà $s=0$, $c=1$. E se sia $A.\text{tang.}\tau=2\pi$: sarà $s=0$, $c=-1$. In ambi i casi la (LXIX) si trasforma in una medesima, che liberata dai fratti porge

(LXX)

$$(y\varphi_2-z\varphi_1)\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=\varphi_3\left\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'\right)\varphi_2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\varphi_1\right\}$$

Ai parametri dunque corrispondenti ad $A.\text{tang.}\tau=0$, e ad $A.\text{tang.}\tau=2\pi$ corrisponde una sola e medesima rigata, a generatrice normale a quella della inviluppata; e la quale è ad elementi paralleli a quelli del cono direttore. Per la qual cosa su questa rigata sono ad un tempo la caratteristica di contatto colla rigata determinatrice, e la caratteristica in sublime dell'anulare.

La (LXX) essendo indipendente dalla φ_4, ne segue che dipende solo dalla φ_3 e dalle φ_1, φ_2. E poichè le rigate a generatrice normale a quella della inviluppata, passano tutte per la curva dei centri dell'anulare, n'emerge il seguente

Teorema. *Tutte le anulari di quinta classe di un medesimo gruppo, di uno stesso genere e di una medesima specie, di*

qualunque varietà sieno, hanno tutt' i centri delle loro circonferenze generatrici allogati sopra una sola e medesima rigata ad elementi paralleli a quelli del loro comune cono direttore. Onde è che data di natura una tale superficie rigata, resta determinata l' anulare di specie e di genere bensì, ma non di varietà.

Per ciò che abbiamo osservato al N. precedente, l' ultima trovata espressione e la (LXVII), od anche (54) la (LXIV) esprimono insieme la linea di contatto dell' anulare colla sua rigata determinatrice. E però conchiuderemo, che una tal linea è indipendente del tutto dalla φ_4; e che data la rigata determinatrice essa linea vien determinata su questa dalla φ_3; perocchè date le φ_1, φ_2 sono del tutto determinate la (LXVII) e la (LXIV), ma la (LXX) non è determinata che quando colle φ_1, φ_2 è data anche la φ_3. Dunque *è la linea di contatto dell' anulare colla sua rigata determinatrice che determina la specie di essa*: essendo la forma della funzione φ_3 che la dà (51).

62. Sia ora $A.\text{tang}.\tau=1^q$; sarà $s=1$, $c=0$. E se sia $A.\text{tang}.\tau=3^q$; sarà $s=-1$, $c=0$. In ambi questi casi la (LXIX) diventa

(LXXI)

$$\left\{(y-\varphi_1)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)-(z-\varphi_2)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\right\}\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)}=$$
$$\varphi_1\left\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\varphi_2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\varphi_1\right\}$$

Espressione indipendente dalla φ_3, al contrario della (LXX) ch' è indipendente dalla φ_4; e la quale rappresentando una superficie che ha sur essa le due caratteristiche, la più vicina al cono direttore, e la più lontana da essa, è indipendente dalla φ_3, e dipende dalla φ_4, come lo è per la (LXV) che pure rappresenta una superficie (55) sulla quale sono esse due medesime caratteristiche, la più vicina e la più lontana dal cono direttore.

E poichè l' ultima ottenuta espressione è indipendente dalla φ_3, e rappresenta una rigata i di cui elementi sono paralleli alla rigata determinatrice, e passano per la curva dei centri dell'anulare (35), ne inferiremo il

Teorema. *Tutte le anulari di quinta classe di un medesimo genere di uno stesso gruppo, e di qualunque specie sieno, purchè appartengano ad un medesimo stipite di varietà* (51), *hanno i cèntri di tutte le loro circonferenze generatrici allogati in una sola e medesima rigata ad elementi paralleli a quelli della rigata determinatrice.*

Ond' è che *data di natura quest' ultima rigata, resta determinata di genere e varietà l' anulare, ma non di specie.* E se si rifletta che questa rigata, e l' altra rappresentata dalla (LXX) passano insieme per la curva dei centri, e che determinata quest' ultima espressione è determinata la φ_3 (61), si conchiuderà che una tal curva dipende non solo dalla φ_4, ma ancora dalla φ_3; e che data la rigata ad elementi paralleli a quelli del cono direttore avente la caratteristica di contatto dell' anulare colla sua rigata determinatrice come sua direttrice (ch'è appunto quella espressa dalla (LXX)) essa curva vien determinata su questa dalla φ_4; perocchè date le φ_1, φ_2, φ_3 è del tutto determinata la (LXX), ma la (LXXI), la di cui intersezione coll' altra dà la detta curva, non è determinata, che quando colle φ_1, φ_2, φ_3, è data anche la φ_4.

Intanto è osservabile che l' ultima trovata espressione è del tutto simile alla (LXVIII) della inviluppata in sublime dell' anulare; e che solo ne differiscono, per essere in quest' ultima invece della φ_4 il $2\varphi_4$. E così debb' essere; perciocchè la rigata della espressione (LXXI) ha le sue generatrici rette ad egual distanza da quelle della rigata della espressione (LXVII) e dalle altre della rigata della espressione (LXVIII): e comprendesi la ragione ancora della composizione relativa di esse tre espressioni. Per la (LXVII) la distanza φ_4 di ciascuna generatrice retta della superficie dalla rigata determinatrice è zero; per la (LXXI) la distanza di ciascuna generatrice retta dalla determinatrice è la stessa φ_4; e per la (LXVIII) la distanza di ciascuna generatrice retta dalla determinatrice medesima è $2\varphi_4$: e comprendesi ancora perchè con mirabile accordo tutte e tre sono indipendenti dalla φ_3.

III.

63. Al N. 51 classificammo le anulari tutte di quinta classe in gruppi, generi, specie, e varietà fondandoci sulle forme diverse che potrebbero avere le quattro funzioni arbitrarie φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 che entrano nella composizione della espressione analitica dell' anulare.

E dopo, dalle verità enunciate ai N. 57, 61, e 62, siamo stati naturalmente condotti a cavare conseguenze per le quali abbiamo potuto comprendere l' equivalente geometrico di quella classificazione. Onde è che possiamo ora in uno conchiudere:

1.° che dato il cono direttore e la rigata determinatrice è dato il gruppo ed il genere dell' anulare (57); perocchè per esse son date le forme delle funzioni φ_1, φ_2, che determinano l'una il gruppo e l' altra il genere (51):

2.° che data in oltre sulla rigata determinatrice una curva continua, è data la specie dell' anulare; perocchè per essa è data (61) la forma della funzione φ_3, che determina la specie (51).

3.° che data in oltre una rigata ad elementi paralleli a quelli del cono direttore, avente per direttrice sua la curva di specie, ed una curva continua tracciata sur essa, è data la varietà dell' anulare; perocchè è data perciò (62) la forma della funzione φ_4, che determina la varietà (51).

Quindi il

Teorema. *Classificate in Gruppi tutte le anulari che ammettono un medesimo cono direttore*, 1.° *quelle di un medesimo gruppo sono di tanti Generi, per quante possono essere di varia natura tutte le immaginabili curve tracciabili sur esso cono; ed appartengono ad un medesimo genere quelle le di cui rigate determinatrici, hanno una medesima di queste curve per direttrice:* 2.° *quelle di un medesimo genere sono di tante Specie, per quante possono essere di diversa natura tutte le immaginabili curve tracciabili sulla rigata determinatrice; ed appartengono ad una medesima specie quelle la di cui curva di contatto colla corrispon-*

dente rigata determinatrice, *è della stessa natura* : 3.ª *quelle di una medesima specie sono di tante varietà*, *per quante possono essere di diversa natura tutte le immaginabili curve tracciabili sur una superficie rigata ad elementi paralleli a quelli del cono direttore*, *avente quella curva di specie per direttrice.*

IV.

64. Per ultimo si voglia la espressione della *curva luogo dei centri* di tutte le circonferenze generatrici, dell' anulare generale di quinta classe.

Per trovarla, consideriamo che tutte le rigate a generatrice normale a quella della inviluppata passano per essa curva dei centri, e che però la esistenza simultanea delle espressioni di due diverse di esse, dà per lo appunto essa curva. Scegliamo per esse due, quelle le di cui espressioni sono le più semplici. E però prendiamo le due (LXX), (LXXI): e queste due, simultaneamente considerate, esprimono per lo appunto essa curva dei centri. E si potranno comunque combinare tra loro ; onde otterremo altre espressioni equivalenti ad esse medesime ; e che pure rappresenteranno essa curva. Così, se riteghiamo la prima di esse e l' altra che risulta dal dividerle l' una per l' altra ; ottenghiamo, dopo le riduzioni che si presentano, tenendo conto della prima medesima, per *espressione della curva dei centri*, le altre due

(LXXII)

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_3\left\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\varphi_2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\varphi_1\right\}=(\varphi_2 y-\varphi_1 z)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)}.\rho \\ \varphi_3\left\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)z-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)y\right\}=(\varphi_2 y-\varphi_1 z)\left(\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)}-\varphi_4\right).\rho \end{array}\right.$$

Espressioni che hanno maggiore analogia tra loro delle precedenti ; ma delle quali non potremo valerci, quando il primo membro di ciascuna di esse, per la generazione dell' anulare particolare, andassero a zero o diventassero identici ; perciocchè esse allora, nel

fatto, *potrebbero equivalere* ad una sola. Però ci serviremo delle espressioni (LXXII), analoghe tra loro, sempre che ciò non avvenga: ed in generale secondo le occorrenze, o di esse medesime o delle (LXX, e LXXI), considerate simultaneamente.

In queste due ultime espressioni, e nelle (LXXII) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \rho$ hanno il significato dichiarato innanzi (47, 48); e la φ dipende dalle φ_1, φ_2, per la solita relazione (LXI)

$$\varphi^2\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'z+\varphi_1{}^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'x+\varphi_2{}^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'y=0\,;$$

65. Potrebbero essere tali le forme delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, da far risultare di primo grado una delle equazioni alle quali si ridurrebbero le (LXXII) per la sostituzione di esse funzioni; o tali da potersi da esse due equazioni medesime ottenere una terza equazione di primo grado rispetto alle variabili. Allora tutte le anulari di quel gruppo, genere, specie, e varietà, corrispondenti a quelle individuate forme delle funzioni φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, apparterrebbero a famiglie diverse di un medesimo stipite, o carattere: e questo è il caso che dicevamo al N. 51. Il carattere comune a tutte queste famiglie sarebbe di essere a *curva dei centri piana.*

E parimenti se avvenisse che la φ_4 si mantenesse costante, si avrebbero varietà di generi, specie, e gruppi diverse, ma appartenenti ad una medesima famiglia, od a famiglia di un medesimo stipite, o carattere: e direbbonsi a *generatrici costanti.*

66. Se fossero tali le forme delle φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 da non risultare di primo grado nessuna delle (LXXII), ma la (LXXI), che sempre può cavarsene; ovvero se esistesse tal relazione tra esse od alcune di esse, da riferirsi ad un piano la relazione (LXXI), introdotte tali relazioni nelle diverse espressioni analitiche trovate, le trasformate apparterrebbero alle famiglie delle *Canali*, considerate dal celebre Mônge: e proprio ad esse se la φ_4 fosse costante; ma a *famiglie più generali* se la φ_4 restasse variabile. Perciocchè allora i piani delle circonferenze generatrici dell' anulare si manterrebbero sempre perpendicolari ad un medesimo piano, che sarebbe il piano

dei centri ; onde l' anulare potrebbe riguardarsi come inviluppo di sfere : e nel primo caso di φ_4 costante, la sfera mobile sarebbe di uguale grandezza , ed il canale di ampiezza costante : nel secondo caso di φ_4 variabile , la sfera mobile sarebbe di grandezza variabile , e quindi il *canale di ampiezza variabile.*

Quando si bramassero le espressioni delle anulari di quinta classe appartenenti alle famiglie delle canali ; non si dovrebbe far altro per trovarle che introdurre nelle espressioni trovate la detta relazione tra le φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 o tra alcune di esse. E per determinare essa relazione potrebbe servire la seguente considerazione , che ne mostra la esistenza : od anche potrebbe farsi uso di altra equivalente.

Immaginiamo già esistere nello spazio la rigata determinatrice dell' anulare. Perchè la (LXXI) potesse essere un piano , dovrebbe la rigata determinatrice essere a piano direttore. E così immaginiamo che sia. E sia dato nello spazio il vertice del cono direttore da determinarsi. Per un tàl punto immaginiamo condotte delle rette perpendicolari alle rette della rigata determinatrice. Il luogo dei piedi di queste perpendicolari costituirà la direttrice del cono, e la direttrice della rigata a piano direttore. Si tratterà di esprimere coll' analisi che il piano che passa per ciascuna retta della rigata e per l' altra del cono la quale è ad essa perpendicolare, tocca sempre la curva luogo dei piedi di quelle perpendicolari. E la espressione di questa condizione darà la chiesta relazione. Ma non ci fermeremo su questa ricerca , bastandoci averne indicato il principio e lo scopo.

ARTICOLO V.

Dati i Determinanti dell'Anulare Particolare di quinta classe, determinarne la equazione: e determinarne quelle della sua caratteristica, della sua inviluppata, e della rigata a generatrice normale a quella della inviluppata.

I.

67. Secondo che ponemmo (*) sono Determinanti di una anulare di quinta classe il suo cono direttore, la sua rigata determinatrice, e le leggi del variare delle distanze del centro della circonferenza mobile che genera la superficie, dal lato del cono e dalla retta della determinatrice, che sono sul piano di essa circonferenza in ogni sua posizione.

E questi determinanti possono essere od esplicitamente, od implicitamente dati.

68. Siano in primo esplicitamente dati.

Sia

$$\mathfrak{L}_1(x, y, z)=0$$

la equazione del cono direttore. E

$$\mathfrak{L}_2(x, y, z)=0$$

quella della rigata determinatrice.

Queste due superficie s' intersecheranno (43). Siano β, γ, ε le coordinate della curva di loro intersezione. Le equazioni di sopra saranno soddisfatte da quest' ultime coordinate, e le due

$$\text{(LXXIII)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_1(\beta, \gamma, \varepsilon)=0 \\ \mathfrak{L}_2(\beta, \gamma, \varepsilon)=0 \end{cases}$$

esprimeranno la curva che è direttrice comune del cono direttore, e della rigata determinatrice, nel senso detto al N. 44.

(*) *Generalità Geometriche sulle superficie anulari*. Pubblicate per le stampe 1844. Napoli.

Colle equazioni (LXXIII) esistono le loro derivate rispetto a β

$$\mathcal{L}_1'(\gamma)\gamma'+\mathcal{L}_1'(\varepsilon)\varepsilon'=0$$
$$\mathcal{L}_2'(\gamma)\gamma'+\mathcal{L}_2'(\varepsilon)\varepsilon'=0$$

e colle quattro precedenti l' altra (10)

$$(\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)x+(\varepsilon-\beta\varepsilon')y-(\gamma-\beta\gamma')z=0$$

che è quella del piano tangente alla curva delle equazioni (LXXIII).

Nota la legge del variare delle distanze del centro della circonferenza mobile dalle rette del cono direttore e della rigata determinatrice che sono sul suo piano in ogni sua posizione, debb'esser nota una relazione tra esse distanze δ,α, e le coordinate x,y,z. Siano

$$\mathcal{L}_3(\delta,\, x,\, y,\, z)=0$$
$$\mathcal{L}_4(\alpha,\, x,\, y,\, z)=0$$

cotali relazioni.

Abbiamo dunque le sette equazioni

$$\text{(LXXIV)}\quad \begin{array}{ll} (1) & \mathcal{L}_1(\beta,\, \gamma,\, \varepsilon)=0 \\ (2) & \mathcal{L}_2(\beta,\, \gamma,\, \varepsilon)=0 \\ (3) & \mathcal{L}_1'(\gamma)\gamma'+\mathcal{L}_1'(\varepsilon)\varepsilon'=0 \\ (4) & \mathcal{L}_2'(\gamma)\gamma'+\mathcal{L}_2'(\varepsilon)\varepsilon'=0 \\ (5) & (\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)x+(\varepsilon-\beta\varepsilon')y-(\gamma-\beta\gamma')z=0 \\ (6) & \mathcal{L}_3(\delta,\, x,\, y,\, z)=0 \\ (7) & \mathcal{L}_4(\alpha,\, x,\, y,\, z)=0 \end{array}$$

Dalle quali conosceremo tutte e cinque le funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 che sono nelle trovate espressioni delle anulari.

Dalle prime quattro delle equazioni (LXXIV) caveremo i valori di γ, ε, γ', ε': Sostituiti questi valori nella quinta, avremo nella trasformata una equazione che conterrà β, x, y, z; la quale risoluta rispetto a β darà il valore di β in funzione di x, y, z; e questa (47) sarà la funzione $\varphi(x, y, z)$ cercata. I valori di γ, ε che si saranno ottenuti, sono in funzione della sola β, onde sostituito in essi valori, quello ottenuto per β, otterremo per γ un valore tutto

in x, y, z, perciocchè β così è data; e questo valore sarà la funzione φ_1: e parimenti per ε otterremo un valore tutto in x, y, z, e questa sarà la funzione φ_2. Risoluta la sesta equazione rispetto a δ si otterrà (47) la funzione φ_3. E risoluta la settima rispetto ad α, otterrassi la funzione φ_4.

II.

69. Siano ora non più esplicitamente dati i determinanti anzidetti (67) della superficie.

Potranno darsi due casi. O che sia data la direttrice comune del cono direttore e della rigata determinatrice; o che sia data una curva qualunque direttrice del cono direttore, ed una qualunque direttrice della rigata determinatrice. Esamineremo prima, come procedere nel primo caso, dopo come procedere nel secondo.

70. Siano le equazioni

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_1(\beta, \gamma, \varepsilon)=0 \\ \mathfrak{L}_2(\beta, \gamma, \varepsilon)=0 \end{cases}$$

quelle della curva direttrice comune del cono direttore, e dell'anulare determinatrice. E

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_3(p, q, r)=0 \\ \mathfrak{L}_4(p, q, r)=0 \end{cases}$$

quelle della curva luogo dei centri della circonferenza mobile. E siano al solito x, y, z le coordinate dell' anulare, riferite tutte ai medesimi assi ortogonali, che passano per quel punto che sarebbe vertice del cono direttore: siano cioè x, β, p, quelle valutate sul primo asse, y, γ, q quelle valutate sul secondo, e z, ε, r, quelle valutate sul terzo.

Avremo le seguenti dieci equazioni (44, 10, 11, 9)

$$
(\mathrm{LXXV})\quad
\begin{array}{ll}
(1) & \mathcal{L}_1(\beta,\gamma,\varepsilon)=0\\
(2) & \mathcal{L}_2(\beta,\gamma,\varepsilon)=0\\
(3) & \mathcal{L}_1'(\gamma)\gamma'+\mathcal{L}_1'(\varepsilon)\varepsilon'=0\\
(4) & \mathcal{L}_2'(\gamma)\gamma'+\mathcal{L}_2'(\varepsilon)\varepsilon'=0\\
(5) & (\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)x+(\varepsilon-\beta\varepsilon')y-(\gamma-\beta\gamma')z=0\\
(6) & \mathcal{L}_3(p,q,r)=0\\
(7) & \mathcal{L}_4(p,q,r)=0\\
(8) & (\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)p+(\varepsilon-\beta\varepsilon')q-(\gamma-\beta\gamma')r=0\\
(9) & \delta=\sqrt{\left(p^2+q^2+r^2-\frac{(\beta p+\gamma q+\varepsilon r)^2}{\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2}\right)}\\
(10) & \alpha=\left(1-\frac{\beta p+\gamma q+\varepsilon r}{\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2}\right)\sqrt{(\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2)}
\end{array}
$$

delle quali la terza e quarta sono le derivate delle due prime rispetto a β; la quinta è la equazione del piano tangente alla curva delle due prime equazioni; e le tre ultime emergono dalle sette precedenti in conformità delle considerazioni fatte ai N. 8, 9, 10, 11, 44. E queste dieci equazioni determinano le funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

Trattate le prime cinque delle (LXXV), come le prime cinque delle (LXXIV) si otterrà $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$: saranno i valori di $\beta, \gamma, \varepsilon$. Nella ottava delle equazioni (LXXV) precedenti, ponendo per $\beta, \gamma, \varepsilon$ γ', ε' i valori che si saranno ottenuti dalle cinque prime, otterremo nella trasformata una equazione tra p, q, r, e le x, y, z. Risoluta questa trasformata colla sesta e settima simultaneamente, otterremo i valori di p, q, r, tutti in funzione di x, y, z. Sostituiti questi valori nelle due ultime, e sostituitivi anche quelli delle $\beta, \gamma, \varepsilon$, otterremo immediatamente i valori di δ, α in funzione di x, y, z; e questi saranno le funzioni φ_3, φ_4, (47).

71. Per ultimo siano

$$
\begin{cases}
\mathcal{L}_1(\beta,\gamma,\varepsilon)=0\\
\mathcal{L}_2(\beta,\gamma,\varepsilon)=0
\end{cases}
$$

le equazioni della curva direttrice del cono direttore, il di cui vertice è alla origine delle coordinate. E siano

$$\begin{cases} \mathcal{L}_3(\theta, \mu, \psi)=0 \\ \mathcal{L}_4(\theta, \mu, \psi)=0 \end{cases}$$

quelle della curva direttrice della rigata determinatrice. E siano s, t, v le coordinate della curva d' intersezione di queste due superficie. Siano in fine

$$\mathcal{L}_5 (p, q, r)=0$$
$$\mathcal{L}_6 (p, q, r)=0$$

le equazioni della curva dei centri dell' anulare.

A causa di questi dati, come determinanti, pel detto dal N.38 al N. 44, ed anche ai N. 9, 10, ed 11, avremo per determinare le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, le seguenti equazioni

(LXXVI)

$$(1) \quad \mathcal{L}_1 (\beta, \gamma, \varepsilon)=0$$

$$(2) \quad \mathcal{L}_2 (\beta, \gamma, \varepsilon)=0$$

$$(3) \quad \mathcal{L}_1'(\gamma)\gamma'+\mathcal{L}_1'(\varepsilon)\varepsilon'=0$$

$$(4) \quad \mathcal{L}_2'(\gamma)\gamma'+\mathcal{L}_2'(\varepsilon)\varepsilon'=0$$

$$(5) \quad \mathcal{L}_3 (\theta, \mu, \psi)=0$$

$$(6) \quad \mathcal{L}_4 (\theta, \mu, \psi)=0$$

$$(7) \quad (\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)\theta+(\varepsilon-\beta\varepsilon')\mu-(\gamma-\beta\gamma')\psi=0$$

$$(8) \quad s=\frac{\beta(\beta\theta+\gamma\mu+\varepsilon\psi)\varepsilon}{\gamma(\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2)}$$

$$(9) \quad t=\frac{\beta(\beta\theta+\gamma\mu+\varepsilon\psi)}{\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2}$$

$$(10) \quad v=\frac{(\beta\theta+\gamma\mu+\varepsilon\psi)\varepsilon}{\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2}$$

$$(11) \quad \left(t\left(\frac{dv}{d\beta}\right)-v\left(\frac{dt}{d\beta}\right)\right)x+\left(v\left(\frac{ds}{d\beta}\right)-s\left(\frac{dv}{d\beta}\right)\right)y+\left(s\left(\frac{dt}{d\beta}\right)-t\left(\frac{ds}{d\beta}\right)\right)z=0$$

$$(12) \quad \mathcal{L}_5 (p, q, r)=0$$

$$(13) \quad \mathcal{L}_6 (p, q, r)=0$$

$$(14) \quad \left(t\left(\frac{dv}{d\beta}\right)-v\left(\frac{dt}{d\beta}\right)\right)p+\left(v\left(\frac{ds}{d\beta}\right)-s\left(\frac{dv}{d\beta}\right)\right)q+\left(s\left(\frac{dt}{d\beta}\right)-t\left(\frac{ds}{d\beta}\right)\right)r=0$$

$$(15) \quad \delta=\sqrt{\left(p^2+q^2+r^2-\frac{(sp+tq+vr)^2}{s^2+t^2+v^2}\right)}$$

$$(16) \quad \alpha=\left(1-\frac{sp+tq+vr}{s^2+t^2+v^2}\right)\sqrt{(s^2+t^2+v^2)}$$

Ed ecco in qual modo per via di queste sedici equazioni si procederà alla determinazione delle funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

Dalle quattro prime si determineranno i valori di $\gamma, \varepsilon, \gamma', \varepsilon'$, i quali saranno dati tutti in β. Ed essi valori si sostituiranno nella settima, che si ridurrà a contenere le θ, μ, ψ, e la β. La equazione trasformata della settima, e la quinta ed anche la sesta si risolveranno rispetto alle θ, μ, ψ, e si otterranno i valori di queste in funzione di β. Questi valori di θ, μ, ψ, (in funzione di β) e quelli che si saranno ottenuti per γ ed ε (che pure sono in funzione di β) si sostituiranno nelle equazioni ottava, nona, e decima: e se ne otterranno i valori di s, t, v, in β. Ottenuti che si saranno cotali valori di s, t, v, si calcoleranno le loro derivate rispetto a β. Ed esse derivate ed i valori che si saranno già ottenuti per s, t, v, si sostituiranno nella undicesima; la trasformata della quale però dopo le sostituzioni conterrà la sola β, e le x, y, z. E questa trasformata si risolverà rispetto a β. Il valore di β che se ne otterrà, il quale sarà in x, y, z, si sostituirà nei valori di s, t, v, già ottenuti in funzione della sola β; e questi valori di s, t, v, si otterranno perciò in x, y, z soltanto: ed essi saranno rispettivamente le funzioni $\varphi(x, y, z)$, $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$. Nelle derivate già calcolate di s, t, v, rispetto a β, si porrà il valore che in x, y, z si sarà ottenuto per β, ed i valori che ne risulteranno, insieme con quelli di s, t, v, in x, y, z già ottenuti, si sostituiranno tutti nella quattordicesima equazione. E la trasformata di questa, che però non conterrà che p, q, r, ed x, y, z, e le equazioni duodecima e tredicesima, si risolveranno rispetto a p, q, r: ed i valori di p, q, r, che ne risulteranno, conterranno x, y, z, soltanto. Avremo dunque ottenuto i valori di s, t, v, p, q, r, tutti in x, y, z. Sostituiremo questi valori nelle due ultime equazioni; ed otterremo δ, ed α, entrambe in funzione delle sole x, y, z: e queste saranno le funzioni $\varphi_3(x, y, z)$, $\varphi_4(x, y, z)$.

Tutti questi calcoli da farsi potranno sembrare lunghi e laboriosi, ma nei casi pratici risulteranno molto più accorciati; e d'altronde molte quantità da calcolarsi entrano in egual guisa in diverse delle sedici equazioni (LXXVI); onde l'esperto calcolatore,

menando innanzi i calcoli con ordine ed avvedutezza, non troverà che siano essi molto lunghi.

III.

72. Nei numeri precedenti, abbiamo insegnato a cavare le forme delle funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 dai dati *determinanti dell' anulare particolare* di quinta classe, ovvero dalle equazioni che rappresentano i medesimi determinanti. E questi sono il suo cono direttore, la sua rigata determinatrice, e le leggi del variare delle distanze del centro delle circonferenze dell'anulare dalle rette sul suo piano di esso cono e della determinatrice. Ed abbiamo eziandio insegnato a ciò fare, quando invece di esser dati effettivamente essi determinanti, o le equazioni loro; sieno date le curve direttrici del cono direttore e della rigata determinatrice, e due superficie su cui ad un tempo sono i centri di tutte le circonferenze dell' anulare; nel quale altro caso pure essi determinanti sono come dati, ma implicitamente.

Dedotte da essi individuati determinanti (od esplicitamente od implicitamente dati) le forme delle funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 debbe aversi come determinata di fatto la equazione dell' anulare particolare dei determinanti medesimi, ed anche quelle di ciascuna caratteristica di essa, di ciascuna sua inviluppata rigata, ed anche della rigata a generatrice normale a ciascuna di quelle della inviluppata. Perocchè basta perciò sostituire esse effettive determinate funzioni in luogo di φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, nelle diverse espressioni analitiche ritrovate innanzi. Onde è che debbe considerarsi col presente articolo, come compiuta la trattazione generale delle anulari generali di quinta classe. Ma quì non ci arresteremo; piacendoci immaginarci certi particolari determinanti di anulari a cono direttore, siano impliciti od anche espliciti, assumerli come dati, e quindi dedurne di fatto la determinazione delle funzioni effettive, che le φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 per esse sono delle coordinate x, y, z; ed anche, ove lo stimeremo opportuno, determinarne le effettive equazioni algebriche dell' anulare di essi determinanti, ed anche delle sue caratteristiche,

inviluppate e rigate a generatrici a ciascuna di queste normali. E ciò faremo nel seguente Articolo, ove sono quattro esempii di applicazioni delle cose fin quì esposte.

Intanto stimiamo che non sia fuor di luogo il quì osservare che non perchè abbiamo imparato a determinare tutte cinque le φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, possa dedursene essere esse funzioni tutte cinque arbitrarie, e non solo le φ_3, φ_4, e due delle φ, φ_1, φ_2, come ampiamente dicemmo (49). Di fatto è facile il riconoscere che la 5.ª delle (LXXIV), e delle (LXXV), ed anche la 11.ª delle (LXXVI) sono equivalenti alla (LXI), che è la relazione che lega tra loro le φ, φ_1, φ_2, per cui due sole ne sono arbitrarie, e non tutte e tre. E nulla può meglio ciò riconfermare, quanto il considerare, che ove in un modo esplicito fossero immediatamente date quattro sole delle funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, per le cose dette nei paragrafi precedenti, si avrebbe modo da trovare speditamente i determinanti dell' anulare, la equazione della quale sarebbe determinata per quelle funzioni. Così siano ad arbitrio date quattro funzioni qualunque delle x, y, z. Chiamate coteste funzioni φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 per la (LXI) si otterrebbe la φ. E quindi sostituite le date funzioni assunte ad arbitrio e la φ dedottane, nella (LXVII) si avrebbe la rigata determinatrice dell' anulare; sostituitele nelle (LXXII), od invece nelle (LXX) e (LXXI) si avrebbe la legge del variare delle distanze del centro della generatrice dell' anulare da ciascuna retta del cono direttore e della determinatrice che sono sul suo piano; e fatto $y=\varphi_1$, e $z=\varphi_2$ si avrebbe la curva direttrice del cono direttore, ossia questo medesimo cono, essendone (3) il vertice nella origine delle coordinate.

ARTICOLO VI.

Applicazione delle cose esposte ne' paragrafi precedenti.

ESEMPIO PRIMO.

I.

73. Troviamo la equazione dell' anulare il di cui cono direttore sia un cono retto; la di cui rigata determinatrice abbia per direttrice la base stessa del cono; ed i centri delle circonferenze generatrici della quale stiano tutti su di una stessa retta menata pel vertice del cono.

È chiaro che dovremo far uso del secondo dei tre processi esposti innanzi (70) per la determinazione delle funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$; perciocchè qui la base del cono è curva direttrice comune del cono direttore, e della rigata determinatrice.

Sia

b il raggio della base del cono

a l' altezza del cono

m, n le tangenti trigonometriche, che le projezioni della retta sui piani coordinati fanno coll' asse stesso del cono.

Le quattro prime delle equazioni (LXXV) saranno sostituite dalle

$$\varepsilon+a=0$$
$$\beta^2+\gamma^2-b^2=0$$
$$\varepsilon'=0$$
$$\beta+\gamma\gamma'=0.$$

E da queste otterremo

$$\varepsilon=-a\,,\quad \gamma=\pm\sqrt{(b^2-\beta^2)}\,,\quad \varepsilon'=0\,,\quad \gamma'=\mp\frac{\beta}{\sqrt{(b^2-\beta^2)}}\,.$$

Quindi la quinta delle equazioni (LXXV) sarà sostituita dall' altra

$$a\beta x\pm ay\sqrt{(b^2-\beta^2)}+b^2z=0$$

Risoluta questa rispetto a β porge

$$\beta = \frac{-b}{a(x^2+y^2)}\left(bxz \mp y\sqrt{(a^2x^2+a^2y^2-b^2z^2)}\right)$$

E sostituito questo valore in quello di γ trovato di sopra, ottenghiamo

$$\gamma = \pm\frac{b}{a(x^2+y^2)}\sqrt{\left(a^2(x^2+y^2)^2-\left(bxz \mp y\sqrt{a^2x^2+a^2y^2-b^2z^2}\right)^2\right)}$$

Il centro della circonferenza mobile dell'anulare, dovendo stare sempre su di una retta che passa per lo vertice del cono direttore, e le di cui projezioni fanno col suo asse gli angoli delle tangenti m ed n, le equazioni sesta e settima delle (LXXV) saranno sostituite dalle

$$p = mr$$
$$q = nr$$

E quindi la ottava di esse equazioni dall' altra

$$a\beta mr \pm anr\sqrt{(b^2-\beta^2)}+b^2r=0.$$

E da queste tre ultime equazioni si ha

$$p=0,\ q=0,\ r=0.$$

Sostituiti questi valori di p, q, r, ed i già ottenuti per $\beta, \gamma, \varepsilon$, nelle ultime due delle equazioni (LXXV), si ha

$$\delta=0,\ \alpha=\sqrt{(a^2+b^2)}.$$

Quindi è che per l' anulare di che si tratta le funzioni che doveano determinarsi, risultano determinate come appresso: cioè

$$\varphi = \frac{-b}{a(x^2+y^2)}\left(bxz - y\sqrt{a^2x^2+a^2y^2-b^2z^2}\right)$$

$$\varphi_1 = \frac{b}{a(x^2+y^2)}\sqrt{a^2(x^2+y^2)^2-\left(bxz-y\sqrt{a^2x^2+a^2y^2-b^2z^2}\right)^2}$$

(LXXVII) $\varphi_2 = -a$

$$\varphi_3 = 0$$

$$\varphi_4 = \sqrt{a^2+b^2}$$

A ciascuno dei radicali che entrano nelle funzioni φ, φ_1, competerebbe il doppio segno; ma noi vi abbiam ritenuto il solo segno superiore; perciocchè essi doppii segni voglion dire, come è di fatto, che ad ogni ascissa individuata della direttrice comune del cono direttore e della rigata determinatrice dell' anulare, corrispondono due generatrici diverse di questa; e che ad ogni valore assoluto dell'ascissa di essa medesima curva corrispondono due individuate ordinate, e perciò ad ogni valore assoluto dell' ascissa corrispondono quattro generatrici diverse; e tutti i valori diversi possibili di esse ascisse ed ordinate, essendo abbracciati (46) nelle espressioni generali notate innanzi, basta contemplare uno solo de' segni di essi radicali, chè gli altri sono implicitamente abbracciati nelle medesime notate generali espressioni. Del radicale della funzione φ_4 si è ritenuto il solo segno positivo, per le ragioni dette al N. 14.

74. Dalle funzioni φ_3, φ_4, potremo conchiudere, che in questa anulare particolare di che si tratta, la circonferenza mobile ha sempre il suo centro nel vertice stesso del suo cono direttore, e che il raggio di essa circonferenza mobile è costante ed è sempre uguale al lato del cono medesimo; perciocchè essendone a l' altezza, e b il raggio della base, esso lato è lungo $\sqrt{(a^2+b^2)}$: ed abbiamo trovato $\alpha=\varphi_4=\sqrt{(a^2+b^2)}$, ed anche $\delta=\varphi_3=0$.

II.

75. Per avere la equazione di quest' anulare particolare di che si tratta, poniamo nella espressione (LIX) per φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 le funzioni (LXXVII) ch' esse rappresentano; ed in primo per φ_3 poniamovi lo zero, e calcoliamovi il trinomio $\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$. Risultando questo trinomio uguale a $\sqrt{(a^2+b^2)}$, cioè costante ed uguale a φ_4, ed essendo ancora $\varphi_3=0$, la espressione (LIX) si trasforma nella

$$((x+\varphi)(x-\varphi)+(y+\varphi_1)(y-\varphi_1)+(z+\varphi_2)(z-\varphi_2))\rho=0\,;$$

o ciò che è lo stesso,

$$(x^2-\varphi^2+y^2-\varphi_1^2+z^2-\varphi_2^2)\rho=0 \qquad \text{(LXXVIII)}$$

E questa si scinde in due fattori. Ed in primo dà

$$x^2+y^2+z^2=\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2$$

Sostituite in questa espressione per φ, φ_1, φ_2, le funzioni (LXXVII) determinate innanzi, ottenghiamo la equazione della superficie, la quale è perciò

$$\text{(LXXIX)} \qquad x^2+y^2+z^2=a^2+b^2$$

Equazione di una sfera, che ha per raggio il lato del cono.

76. Per renderci ragione di questo singolare risultamento, immaginiamo esistere una sfera di raggio $\sqrt{(a^2+b^2)}$; ed intendiamo menato un piano che la seghi secondo un suo parallelo: e sia un tal piano distante dal centro della sfera per a. Esso taglierà la sfera secondo un circolo minore di raggio b. Intendiamo ora un cono avente questo circolo minore per base, ed il centro della sfera per vertice. Ogni piano tangente a questo cono taglierà la sfera secondo un circolo massimo: il quale è di raggio $\sqrt{(a^2+b^2)}$: e la circonferenza di questo circolo è però la circonferenza generatrice della anulare particolare di che quì si tratta. Dunque la immaginata sfera è il luogo di tutte le circonferenze generatrici di essa medesima anulare di che quì si tratta.

Ma se essa sfera è il luogo di tutte le generatrici dell' anulare; a geometricamente considerare la cosa, queste generatrici *non generano di fatto la sfera tutta intera*, ma solo quella sua zona compresa tra i piani $z=a$, $z=-a$. Onde pare che l' algebra non corrisponda esattamente alla geometria; perocchè la equazione

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2$$

appartiene ad una superficie più vasta di quella che è realmente generata dalla data generazione: generando questa una parte di quella. Ma no: se ciò potrebbe sembrar vero nell'*algebra ordinaria*, non lo è punto nel calcolo delle funzioni. La particolare genesi della superficie non è data dalla sua equazione, ma è data dalle forme delle funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. La equazione di una superficie esprime una proprietà di essa: ed il risultato ottenuto di

sopra c' insegna che la proprietà di avere tutt' i suoi punti ad egual distanza da un solo e medesimo punto interno, appartiene in comune tanto alla sfera, quanto all' anulare particolare, di cui abbiamo data la generazione di sopra. Contemplando invece la relazione

$$x^2+y^2+z^2=(\varphi(x,y,z))^2+(\varphi_1(x,y,z))^2+(\varphi_2(x,y,z))^2$$

insieme colle funzioni effettive che esse φ, φ_1, φ_2, sono delle x,y,z, notate di sopra (LXXVII), abbracceremo non solo la proprietà dell' anulare, che può appartenere in comune ad altre superficie, ma ancora la sua genesi. E quindi intenderemo per la forma di esse funzioni, che le parti di sfera che sono al di sopra del piano $z=a$, ed al disotto dell' altro $z=-a$, non sono punto generate dalla circonferenza mobile dell' anulare particolare a cono direttore, di che stiamo trattando. Difatto secondo la data genesi dell' anulare, la superficie generata non può esistere che ove le funzioni $\varphi(x,y,z)$, $\varphi_1(x,y,z)$, $\varphi_2(x,y,z)$ hanno un valore reale. Ora dalle forme datene di sopra, abbiamo che tanto la φ, quanto le φ_1, perchè siano reali, debb' essere

$$b^2z^2 \text{ non maggiore di } a^2x^2+a^2y^2$$

Ma dalla equazione

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2$$

appuriamo che

$$x^2+y^2=a^2+b^2-z^2.$$

Dunque perchè le funzioni φ, φ_1, siano reali, debb' essere

$$b^2z^2 \text{ non maggiore di } a^2(a^2+b^2-z^2)$$

onde z^2 non maggiore di a^2, ossia in grandezza assoluta $z<a$.

Dunque ove z è maggiore di a, non vi sarà superficie; mentre le funzioni $\varphi(x,y,z)$, $\varphi_1(x,y,z)$, non sono in sostanza che i valori di β e γ, dati in funzione dei punti della superficie anulare generata, che appartengono a quella sua circonferenza generatrice il di cui piano tocca la circonferanza base del cono per lo appunto nel punto di coordinate β,γ.

77. Abbiamo detto di sopra (75), che la espressione (LIX)

si trasforma nella (LXXVIII), e che questa si scinde in due fattori, di cui l'uno ci ha data la equazione (LXXIX).

Vediamo ora, cosa ci dice l'altro fattore $\rho=0$, ossia (LX)

$$\sqrt{\left(\varphi^2\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'\right)^2+\left(\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)^2+\left(\varphi_2^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)^2}=0.$$

Eseguendo le operazioni accennate, e tenendo conto (75) che $\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$ uguaglia $\sqrt{(a^2+b^2)}$, ottenghiamo, la espressione di sopra trasformata nella

$$\frac{\varphi'}{\varphi_1}\times b\sqrt{(a^2+b^2)}=0.$$

Onde è che il fattore $\rho=0$, che è uno di quelli, nei quali si scinde la (LXXVIII), equivale alla equazione

$$\frac{\varphi'}{\varphi_1}=0,\ \text{ossia}\ \frac{\varphi'}{\sqrt{b^2-\varphi^2}}=0,\ \text{od anche alla}\ \frac{-\varphi'}{\sqrt{b^2-\varphi^2}}=0,$$

per essere (73) la φ_1 prodotta dalla φ, a causa (47) di essere $\beta=\varphi$, e

$$\gamma=\pm\sqrt{(b^2-\beta^2)}.$$

Ma si ha

$$\int\frac{\varphi'}{\sqrt{b^2-\varphi^2}}=\text{Ang.sen.}\frac{\varphi}{b}-K,\ \text{ed}\int\frac{-\varphi'}{\sqrt{b^2-\varphi^2}}=\text{Ang.cos.}\frac{\varphi}{b}-K_1,$$

Dunque

$$\frac{\varphi}{b}=\text{sen.}K,\ \text{od anche}\ \frac{\varphi}{b}=\text{cos.}K_1,$$

Dunque l'altro fattore $\rho=0$ della (LXXVIII), può aversi come equivalente a

$$\frac{\varphi}{b}=\text{cost. arbitr.}$$

E però ci denota, che non è già, che essa equazione (LXXVIII) si scinde in due, ma sibbene che essa è divisibile per ρ, essendo, per la data genesi dell'anulare di che si tratta, il fattore ρ equivalente ad un fattore costante.

E d'altronde le due equazioni $\frac{\varphi}{b}=\text{sen.}K, \frac{\varphi}{b}=\cos. K$, che provvengono dalla esistenza del fattore $\rho=0$, ci dicono che la funzione φ debb' essere non mai maggiore di b, e sempre reale; perciocchè esse ci mostrano che la funzione φ è dell' indole medesima del seno o coseno di archi di circolo di raggio b. Onde poi n' emerge che non mai, nell' anulare particolare di che si tratta, possa essere in grandezza assoluta $z>a$: conformemente al detto di sopra. E pertanto dovendo essere la φ non mai maggiore di b, anche la φ_1 debb' essere sempre reale.

78. Da tutta l' analisi precedente dunque, potremo conchiudere, che la espressione

$$(x^2-\varphi^2+y^2-\varphi_1^2+z^2-\varphi_2^2)\rho=0$$

ossia

$$\left(x^2+y^2+z^2-(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)\right)\frac{\varphi'}{\varphi_1}=0$$

ci esprime compiutamente la natura dell' anulare, secondo la sua genesi. Il fattore $\frac{\varphi'}{\varphi_1}=0$, esprime l' indole reale delle funzioni φ, φ_1, e che però non può mai essere $z>a$: l' altro fattore dà la proprietà

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2$$

di un punto qualunque di essa anulare.

III.

79. Si voglia ora la rigata determinatrice dell' anulare particolare di che si tratta.

La espressione (LXVII), essendo quella della determinatrice, dobbiamo porre le forme (LXXVII) di φ, φ_1, φ_2, nella

$$\left\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)(z-\varphi_2)-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi^1}\right)'\right)(y-\varphi_1)\right\}\times$$
$$\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}.\rho=0$$

Per le cose dette innanzi (77), questa eguaglianza è divisibile per $\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}.\rho$. E però eseguendo le derivate accennate si riduce

alla

$$(\varphi^2\varphi_1'-\varphi\varphi'\varphi_1+\varphi_2^2\varphi_1')(z-\varphi_2)+(\varphi\varphi'+\varphi_1\varphi_1')\varphi_2(y-\varphi_1)=0.$$

Prima di sostituirvi per $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ le effettive funzioni (LXXVII), consideriamo che essendosi ottenuta la φ_1, ponendo per β la funzione φ nella $\sqrt{(b^2-\beta^2)}$, (73) è

$$\varphi_1=\sqrt{(b^2-\varphi^2)}, \text{ e perciò } \varphi_1\varphi_1'=-\varphi\varphi';$$

e che perciò il secondo termine dell' ultima espressione và a zero, ed essa riducesi alla

$$z-\varphi_2=0.$$

Ponendo ora (LXXVII) per φ_2 la $-a$ ottenghiamo per la equazione della rigata determinatrice

$$z=-a.$$

Ed essendosi anche quì mostrato il fattore $\rho=0$; anche per la rigata determinatrice debbono essere le funzioni φ, φ_1 sempre reali. Ma quando $z=-a$, le funzioni φ, φ_1 diventano rispettivamente

$$\frac{b}{(x^2+y^2)}(bx+y\sqrt{x^2+y^2-b^2}),\ \frac{b}{x^2+y^2}\sqrt{(x^2+y^2)^2+(bx+y\sqrt{x^2+y^2-b^2})^2}.$$

Dunque mentre per la equazione della rigata determinatrice della anulare particolare di che si tratta abbiamo

$$\text{(LXXX)} \qquad z=-a$$

le x, y non potranno essere qualunque, ma dovranno essere tali, da risultare sempre

$$x^2+y^2 \text{ non minore di } b^2.$$

La rigata determinatrice dunque dell' annlare particolare di che si tratta, starà tutta nel piano stesso su cui giace la base del cono direttore, ma non si stenderà punto in essa base. E ciò risponde compiutamente alla generazione geometrica della superficie: perocchè la retta generatrice della rigata determinatrice, dovendosi sempre appoggiare alla base del cono, ch' è sua direttrice, e stare su di un piano sempre ad esso tangente, e dovendo esser sempre

perpendicolare ad un suo lato; debbe sempre stare sul piano della circonferenza base del cono, ed essere ad essa tangente: e però non mai può stendersi al di dentro di essa medesima base la rigata da essa generata.

E pertanto, da ciò che quì abbiam detto, ed anche dalla discussione fatta nei due numeri precedenti, potremo conchiudere questa notevolissima

Proposizione. *Le equazioni* algebriche ordinarie *possono essere insufficienti alla rappresentazione delle superficie quali sono geometricamente generate*; *e perchè* esattamente *le rappresentino*, *è necessario tenere in considerazione simultanea le* funzioni generatrici *di esse equazioni*.

IV.

80. Per avere la equazione della rigata a generatrici parallele a quelle del cono direttore, bisognerà porre le determinate funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, (LXXVII) nella espressione (LXX), che è indipendente da φ_1. Ed in primo ponendo per φ_3 lo zero, essa si riduce alla semplicissima

$$(z\varphi_1-y\varphi_2)=0$$

a causa di essere divisibile (77) per $\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$.

Il porre immediatamente nell' ultima semplice espressione per φ_1, φ_2 immediatamente le funzioni (LXXVII) che rappresentano, e determinate, ci trarrebbe in una formola in apparenza assai complicata, a causa dei radicali contenuti in φ_1. Per ottenere speditamente la più semplice formola in essa complicata espressione nascosta, ricordiamoci (73) che φ_1, è la γ, quando nel suo valore $\gamma=\sqrt{(b^2+\beta^2)}$, poniamo la φ, che è il valore di β cavato dalla equazione

$$a\beta x+ay\sqrt{(b^2-\beta^2)}+b^2z=0.$$

Possiamo dunque sostituire nella espressione

$$z\varphi_1-y\varphi_2=0$$

in vece (LXXVII) di φ_2 il suo valore $-a$, ed invece di φ_1, il valore γ, e tra la precedente, e la

$$z\sqrt{(b^2-\beta^2)}+ay=0$$

eliminare β: e sarà lo stesso che sostituire per φ_1 la funzione espressa innanzi (LXXVII).

Posto nella prima il valore di $\sqrt{(b^2-\beta^2)}$ cavato dalla seconda; risoluta la prima così trasformata rispetto a β, e messo il valore di β nella seconda medesima elevata a quadrato; ottenghiamo in fine per la equazione della rigata a generatrici parallele a quelle del cono direttore dell'anulare

$$\text{(LXXXI)} \qquad a^2(x^2+y^2)=b^2z^2\,;$$

che è la equazione di esso medesimo cono. E così doveva aspettarsi, a causa di $\varphi_3=\delta=0$, per l'anulare di che si tratta.

E per ciò per una tale anulare, la curva di specie (63) è la medesima curva base del cono direttore.

81. Similmente ponendo in tutte le espressioni trovate innanzi le funzioni (LXXVII) determinate di sopra, otterremo le equazioni di tutte le linee o superficie delle quali, nei quattro primi Articoli di questo Capo, abbiamo dato le espressioni analitiche. E senza fermarci ulteriormente intorno a ciò, conchiuderemo, che l'anulare particolare quì contemplata (63):

1.° è del gruppo a cono direttore retto ed a base circolare:

2.° è del genere a curva circolare sul cono direttore:

3.° è della specie a curva circolare sulla rigata determinatrice, concentrica alla curva di genere:

4.° ed è della varietà a generatrici costanti, ossia a curva parimenti circolare sulla rigata ad elementi paralleli a quelli del cono direttore.

Appartiene poi a quella famiglia per la quale la circonferenza di specie ha raggio uguale alla circonferenza di genere, e la circonferenza di varietà ha raggio zero.

E d'altronde ha potuto osservarsi in questo esempio, come, in conformità di ciò che abbiam detto in fine del N.° 70, nei casi

pratici possono, con industria ed avvedutezza, molto abbreviarsi i calcoli da farsi per la determinazione effettiva delle equazioni relative ad anulari particolari.

ESEMPIO SECONDO.

I.

82. Si voglia ora determinare la equazione di quell' anulare particolare di quinta classe, la quale mentre che sia del medesimo gruppo, del medesimo genere e della medesima specie (81) di quella contemplata nell' esempio precedente; anzi della medesima famiglia di specie; appartenga a quella varietà, per la quale la circonferenza mobile, generatrice dell' anulare, sia di grandezza variabile; ed il di cui raggio varii proporzionalmente all' ascissa x di ciascun punto dell' anulare, per lo quale essa generatrice passa.

Per questa anulare particolare, dovremo avvalerci del primo dei tre processi indicati innanzi, ch' è quello del N. 68; perciocchè quì i determinanti dell' anulare sono tutti esplicitamente dati.

Ritenendo le denominazioni precedenti (73), la equazione del cono direttore è

$$a^2(x^2+y^2)=b^2z^2;$$

e la equazione della rigata determinatrice (79) è

$$z=-a$$

E la relazione indicata colla sesta delle equazioni (LXXIV) è $\delta=0$; e l'altra indicata colla equazione settima di esse è $\alpha=mx$, nella quale m è il rapporto del raggio della circonferenza dell'anulare che passa per un suo individuato punto, all' ascissa x di esso medesimo punto.

Dunque le equazioni (LXXIV), saranno sostituite dalle

$$\begin{aligned}
&a^2(\beta^2+\gamma^2)=b^2\varepsilon^2\\
&\varepsilon=-a\\
&\beta+\gamma\gamma'=0\\
&\varepsilon'=0\\
&a\beta x+ay\sqrt{(b^2-\beta^2)}+b^2z=0\\
&\delta=0\\
&\alpha=mx;
\end{aligned}$$

delle quali la terza e quinta così si ottengono, tenendo conto della seconda $\varepsilon=-a$; e per la quale la prima è equivalente all' altra $\beta^2+\gamma^2=b^2$. Dalle prime cinque dunque otterremo le funzioni medesime dell' esempio precedente (73). E pertanto le funzioni resteranno determinate così

(LXXXII)

$$\varphi\,(x, y, z)=\frac{-b}{a(x^2+y^2)}\left(bxz-y\sqrt{a^2(x^2+y^2)-b^2z^2}\right)$$

$$\varphi_1(x, y, z)=\frac{b}{a(x^2+y^2)}\sqrt{a^2(x^2+y^2)-\left(bxz-y\sqrt{a^2(x^2+y^2)-b^2z^2}\right)^2}$$

$$\varphi_2(x, y, z)=a$$

$$\varphi_3(x, y, z)=0$$

$$\varphi_1(x, y, z)=mx$$

II.

83. Per ottenere la equazione dell' anulare particolare di che si tratta poniamo le funzioni (LXXXII) nella espressione (LIX). E per non immergerci in calcoli complicati, osserviamo in primo (77) che essa espressione a causa di $\varphi_3=0$ può aversi come divisibile per ρ; e che (75) essendo $\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2=a^2+b^2$, essa (LIX) si cangia in primo nella

$$(x^2+y^2+z^2)\sqrt{(a^2+b^2)}-(a^2+b^2)\left(2mx-\sqrt{(a^2+b^2)}\right)$$
$$+2(x\varphi+y\varphi_1+z\varphi_2)\left(mx-\sqrt{(a^2+b^2)}\right)=0.$$

E quì dovremmo per $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ sostituire le funzioni di sopra. Ma ciò non faremo, perciocchè ne otterremmo equazione assai complicata, nè facile a ridursi a più semplice forma. Invece per la (LXI) ch' è identica (49) n' elimineremo prima quelle che possiamo di esse funzioni.

Dalle equazioni determinatrici (82) avendosi $\varepsilon=-a$ e quindi $\beta^2+\gamma^2=b^2$, avremo anche

$$\varphi_2=-a,\ \varphi'_2=0,\ \varphi^2+\varphi_1^2=b^2,\ \varphi\varphi'=-\varphi_1\varphi_1'.$$

*

E tenendo conto di queste quattro ultime eguaglianze, ed eseguite le derivate nella (LXI), questa si trasforma nella

$$x\varphi+y\varphi_1+\frac{b^2}{a}z=0$$

E per questa, il trinomio $x\varphi+y\varphi_1+z\varphi_2$ che sta nella già trovata espressione dell' anulare, si cangia in $(\varphi_2 z-\frac{b^2}{a}z)$, che contiene la φ_2 soltanto; onde poi messo per φ_2 la $-a$, ottenghiamo, dopo le riduzioni, e per equazione dell' anulare particolare di che si tratta

$$\text{(LXXXIII)} \qquad a(x^2+y^2+z^2)-2mx(a+z)\sqrt{(a^2+b^2)}+(a+2z)(a^2+b^2)=0$$

Equazione, la quale ci dice, che l'anulare generata appartiene ad una delle note superficie di secondo grado. Ed abbiamo detto *appartiene*, e *non è*; perocchè a causa del fattore $\rho=0$, che anche quì si mostra, non apparterrà all' anulare generata, che una zona della superficie di secondo ordine della equazione (LXXXIII); cioè quella pei punti della quale i valori delle coordinate non rendono immaginarii li valori delle funzioni φ, φ_1, i quali a causa di esso fattore $\rho=0$, debbono essere di natura *essenzialmente reale*, come è facile persuadersi con ragionamenti analoghi a quelli fatti ai N. 76 e 77.

84. Intanto non sarà fuor di luogo il vedere se l' anulare generata possa a qualunque di esse superficie di secondo grado appartenere, od all' una piuttosto che all' altra. Per ciò fare cominciamo dal porre nell' ultima equazione,

$$x=g+s, \quad \text{e} \quad z=h+t;$$

essendo g, h due quantità da determinarsi, ed s e t i nomi che diamo a due nuove coordinate, computate rispettivamente sui medesimi assi delle x e delle z. Sostituiti questi valori nella (LXXXIII), si ottiene una trasformata nella quale i coefficienti dei termini l'uno in t, l' altro in s sono rispettivamente

$$ah-mg\sqrt{(a^2+b^2)}+(a^2+b^2)\,,\quad ag-mh\sqrt{(a^2+b^2)}-ma\sqrt{(a^2+b^2)}$$

E potremo determinare le h, g, per modo, da far essere questi

coefficienti *zero*. Cosicchè la trasformata della (LXXXIII) diventa

$$as^2+ay^2+at^2-2mlst+a(g^2+h^2)-2mgl(a+h)+l^2(2h+a)=0$$

nella quale l sta pel radicale $\sqrt{(a^2+b^2)}$: è cioè l il lato del cono retto di cui a è l'altezza, e b il raggio della base; e vi è

$$g=\frac{ml(l^2-a^2)}{m^2l^2-a^2},\ h=\frac{al^2(1-m^2)}{m^2l^2-a^2}.$$

E per gli elementi è manifesto che quando questi valori di g ed h sono finiti, la superficie rappresentata dalla (LXXXIII) ha centro, quando nò non ha centro. Ma la m può assumersi od uguale $\frac{a}{l}$, nel qual caso g, h sono infinite, o non uguale ad $\frac{a}{l}$. Dunque l'anulare generata può appartenere, o ad una paraboloide, o ad una superficie di secondo grado con centro, secondo che sia m uguale o no al rapporto dell'altezza del cono al suo lato. Quindi è che quando $\varphi_4=\frac{ax}{l}$ si ha una paraboloide, quando $\varphi_4=\frac{(1+e^2)ax}{l}$ oppure $=\frac{ax}{(1+e^2)l}$, si ha un'altra superficie di secondo grado diversa dalla paraboloide.

Vediamo se possa o nò essere una qualunque delle tre che hanno centro.

Sia φ_4 non uguale ad $\frac{ax}{l}$. La superficie generata sarà di secondo grado con centro; ed avrà per equazione riferita al suo centro.

$$as^2+ay^2+at^2-2mlst+A=0,$$

nella quale m è $>$, o $<\frac{a}{l}$, ed ove A è scritta invece del polinomio

$$a(g^2+h^2)-2mgl(a+h)+l^2(2h+a)$$

Riferiamo questa equazione agli assi principali della superficie. E facciamo perciò

$$s=v\cos.\psi-u\,\text{sen}\,\psi\ ,\ t=v\,\text{sen}\,\psi+u\cos.\psi$$

essendo v, u le nuove coordinate computate sugli assi principali, e

ψ l'angolo da determinarsi, che il nuovo asse delle v fà con quello delle s, ossia col primitivo delle x, ed anche che il nuovo delle u fa coll'altro delle t, ossia col primitivo delle z.

Fatte le sostituzioni, otterremo nella trasformata, che il coefficiente di vu è $2ml(\text{sen.}^2\psi - \cos.^2\psi)$. Dunque determineremo l'angolo ψ ponendo

$$\text{sen.}^2\psi - \cos.^2\psi = 0. \text{ Onde sen.}\psi = \cos.\psi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \text{ e } \psi = 45^\circ.$$

Quindi la equazione della superficie riferita ai suoi assi principali è (come si ottiene per lo appunto facendo nell'ultima detta trasformata $\psi = 45^\circ$)

$$(ml - a)v^2 - ay^2 - (ml + a)u^2 = A$$

Facciamo ora $m = \frac{(1+e^2)a}{l}$, cioè $m > \frac{a}{l}$ ottenghiamo l'equazione precedente trasformata nella

$$e^2av^2 - ay^2 - (2 + e^2)u^2 = A.$$

Facciamo invece $m = \frac{a}{(1+e^2)l}$, cioè $m < \frac{a}{l}$ la medesima equazione si trasforma nell'altra

$$e^2av^2 - ay^2 - (2 + e^2)u^2 = A(1 + e^2).$$

L'anulare generale dunque non può mai appartenere ad una ellissoide; perocchè non mai la equazione sua può avere tutti i suoi termini positivi; ma apparterrà o ad una Iperboloide; o ad una Paraboloide, come già abbiam veduto.

La Iperboloide sarà a due foglie se la A è negativa; sarà ad una foglia se la A è positiva. Ma noi non ci fermeremo ulteriormente a vedere quando appartenga all'una piuttosto che all'altra di coteste superficie, nè a quale Paraboloide possa appartenere.

Solo conchiuderemo il seguente

Teorema. *Nelle Iperboloidi e nelle Paraboloidi evvi una zona, nella quale possono descriversi una infinità di circonferenze di circolo i piani delle quali toccano tutti un certo dato cono retto, e le quali hanno sempre un punto in comune colla circonferenza base del cono, ed il centro sur una data curva descritta sur esso medesimo cono.*

Vediamo di qual natura sia una tale curva; epperò determiniamo la equazione della curva dei centri dell' anulare particolare di che si tratta.

85. Per ottenere le equazioni della curva dei centri nell' anulare particolare, di cui qui trattiamo, non ci serviremo delle (LXXII); perciocchè qui è $\varphi_3=0$. Però (64) ci serviremo in vece della (LXX) e della (LXXI).

La prima a causa di $\varphi_3=0$ si riduce in primo alla

$$(\varphi_1 z-\varphi_2 y)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}.\rho=0$$

E per essere quì le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, (LXXXII), identiche alle (LXXVII), ci troveremo nel caso del N.° 80. Onde ottenghiamo in primo

(LXXXIV) $$a^2(x^2+y^2)=b^2z^2$$

E però la curva dei centri stà sul cono direttore medesimo: e così debb' essere, per essere quì la distanza $\delta=\varphi_3=$*zero*.

Per accomodare la (LXXI) alla superficie particolare di che si tratta, calcoliamoci in primo i polinomii

$$\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right); \quad \left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right);$$

e tenendo presente che $\varphi_2'=0$, e $\varphi_1\varphi_1'=-\varphi\varphi'$. Otterremo pel primo $\varphi_1'(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)$, e pel secondo lo *zero*. Onde poi la espressione (LXXI) si riduce alla

$$\varphi_4\varphi_2-(\varphi_2-z)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=0.$$

Posto in questa, per $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$, le funzioni (LXXXII) ch' esse sono delle x, y, z. Ottenghiamo

(LXXXV) $$amx=(z+a)\sqrt{(a^2+b^2)}.$$

Equazione di un piano.

La curva dei centri dunque dell' anulare di che si tratta, è data dalle equazioni

$$a^2(x^2+y^2)=b^2z^2$$
$$amx=(z+a)\sqrt{(a^2+b^2)}.$$

È dunque una curva piana, che giace sul cono direttore medesimo dell' anulare : e sarà una parabola se $m=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{b}$, sarà una ellisse se $m<\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$, ed una iperbole se $m>\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{b}$.

Quindi può enunciarsi il

Teorema. *Il luogo dei centri delle circonferenze, che possono descriversi sulla zona della Iperboloide o Paraboloide contemplata nel Teorema precedente è od una parabola, od una ellisse od una iperbole, giacente sul cono direttore medesimo dell' anulare.*

III.

86. Pertanto dalle cose dette nei paragrafi precedenti conchiuderemo (63) che l'anulare particolare, della quale in questo secondo esempio abbiamo data la genesi,

1.° è del gruppo a cono direttore retto a base circolare,

2.° è del genere a curva circolare sul cono direttore,

3.° è della specie a curva circolare sulla rigata determinatrice concentrica colla curva di genere,

4.° ed è della varietà a curva conica, o di secondo grado, sulla rigata ad elementi paralleli a quelli del cono direttore.

Appartiene poi a quella famiglia per la quale la circonferenza di specie ha raggio uguale alla circonferenza di genere : ed a quello stipite ch' è a curva dei centri piana. Ed ecco un caso del ricordato in generale al N.° 65.

ESEMPIO TERZO.

I.

87. Sia ora parimenti un cono retto a base circolare il cono direttore dell' anulare; ma la sua rigata determinatrice non abbia per direttrice la direttrice medesima del cono, ma una linea fuori

di esso: e sia questa una retta parallela all' asse del cono direttore e distante da esso pel raggio stesso della sua base. Si voglia inoltre che l' anulare appartenga ad una varietà analoga a quella contemplata nel primo esempio (73), cioè che abbia i centri di tutte le sue circonferenze generatrici su di una stessa retta menata pel vertice del cono direttore.

Per quest' anulare particolare, dovremo ricorrere al terzo dei processi indicati innanzi (71), onde determinare $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

Assumiamo che il piano coordinato xz, sia il piano dell' asse del cono e della retta data ad esso parallelo che è la data direttrice della rigata determinatrice; e che, al solito, la origine delle coordinate stia nel vertice del cono. Tenendo ferme le denominazioni precedenti (73), le prime sei equazioni (LXXVI) saranno

$$\begin{aligned} \beta^2+\gamma^2&=b^2\\ \varepsilon&=-a\\ \beta+\gamma\gamma'&=0\\ \varepsilon'&=0\\ \theta&=b\\ \mu&=0 \end{aligned}$$

E per la settima avremo la

$$a(\beta\theta+\mu\sqrt{b^2-\beta^2})+b^2\psi=0.$$

Tenendo conto di questa e delle due precedenti, otteghiamo

$$\theta=b\,,\ \mu=0\,,\ \psi=-\frac{a\beta}{b}.$$

Onde poi le ottava, nona e decima delle (LXXVI) si trasformano in

$$\text{(LXXXVI)}\qquad \begin{aligned} s&=-\frac{a\beta^2}{b\sqrt{b^2-\beta^2}}\\ t&=\frac{\beta^2}{b}\\ v&=-\frac{a\beta}{b} \end{aligned}$$

E calcolate le derivate di s, t, v, rispetto a β, e fatte le sostituzioni, la undicesima si trasforma nella

$$z\beta^3+x(b^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}+ab^2y=0.$$

E dovendo stare il centro della circonferenza mobile dell' anulare sempre su di una retta menata pel vertice del cono, ossia per la origine delle coordinate, le dodici, tredici e quattordici delle (LXXVI) saranno

$$p=mr$$
$$q=nr$$
$$p\sqrt{(b^2-\beta^2)^3}+ab^2q+\beta^3r=0.$$

E però le ultime due diverranno

$$\delta=0\text{ , ed }\alpha=\frac{\beta\sqrt{b^2(a^2+b^2)-\beta^4}}{b\sqrt{b^2-\beta^2}};$$

perciocchè le tre precedenti danno $p=q=r=0$.

Tratterebbesi ora, secondo ciò che si disse (71), di risolvere la equazione

$$z\beta^3+x(b^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}+ab^2y=0,$$

rispetto a β, e quindi sostituire il valore che ne risulterebbe nelle (LXXXVI), ed anche nella trovata espressione di α. Ma poichè l' ultima equazione risulterebbe di sesto grado rispetto a β, potrà addirittura eliminarsi la β tra essa e le notate equazioni (LXXXVI), senza risolversi essa ultima medesima. E così le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ saranno date dalle tre equazioni seguenti

$$b^2x^2\left(2a^2+(\varphi-\sqrt{4a^2+\varphi^2}).\varphi\right)^3=\left(a^4y\sqrt{8}-bz\sqrt{\varphi^3}\sqrt{(\varphi-\sqrt{4a^2+\varphi^2})^3}\right)^2$$

(LXXXVII) $$bx^2(b-\varphi_1)^3=(aby+z\sqrt{b\varphi_1{}^3})^2$$

$$b^2x^2(a^2-\varphi_2{}^2)^3=(a^4y-bz\varphi_2{}^3)^2$$

per la risoluzione effettiva delle quali si otterrebbero esplicitamente $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$. E la φ_4 si otterrà speditamente facendola dipendere dalla φ_2: e sarà

$$\text{(LXXXVIII)} \qquad \varphi_1 = -\frac{\varphi_2}{a^3} \cdot \sqrt{\frac{a^6 + ab\varphi_2^2 - b\varphi_2^4}{a^2 - \varphi_2^2}}.$$

Onde poi nelle espressioni generalissime trovate nei quattro primi articoli di questo capo, posto prima per φ_3 lo *zero*, e dopo per φ, φ_1, φ_2, le funzioni che si ottengono in x, y, z dalla risoluzione delle tre ultime equazioni (LXXXVII), e per φ_1 la trovata funzione (LXXXVIII), si avranno le equazioni dell' anulare particolare di che si tratta, della sua caratteristica, della sua inviluppata ec. Ma non procederemo oltre.

88. Classifichiamo invece l' anulare della quale abbiamo data la generazione.

Determiniamo perciò la curva di genere (63); cioè la curva che sarebbe direttrice comune del cono direttore, e della rigata determinatrice. Epperò eliminiamo addirittura la β tra le (LXXXVI). Le equazioni della curva di genere risultano

$$\text{(LXXXIX)} \qquad \begin{cases} a^2 t = bv^2 \\ a^2 t^2 = b(b-t)s^2 \\ v^4 = (a^2 - v^2)s^2. \end{cases}$$

Delle quali la prima, che è quella della sua projezione sul piano coordinato yz, è la equazione di una parabola di parametro uguale al quadrato dell' altezza del cono diviso per lo raggio della sua base.

Se dunque sul piano menato per l' asse del cono direttore e perpendicolare al piano di esso medesimo asse e della retta data direttrice della rigata determinatrice, intendiamo descritta una parabola col vertice nel vertice del cono, e di parametro il quadrato dell'altezza del cono, diviso pel raggio della sua base, e su di una tale parabola eretto un cilindro retto, la intersezione di questo cilindro col cono sarà la curva di genere: la circonferenza dell' anulare in ogni sua posizione avrà un punto comune con una tale curva; e la distanza di ciascun suo punto dal vertice del cono, sarà il raggio variabile della circonferenza mobile: distanza che corrispondentemente

ad ogni punto di ascissa t, e di ordinata v della parabola base del cilindro, è

$$\frac{v}{a}\sqrt{\frac{b(a^2+bt-t^2)}{b-t}}.$$

Pertanto senza uopo di trovare la equazione effettiva dell' anulare di che si tratta, potremo conchiudere che

1.° è del gruppo a cono direttore retto ed a base circolare:

2.° è del genere di curva sul cono direttore a projezione parabolica sul piano pel suo asse perpendicolare all' altro dell'asse medesimo e di una data retta direttrice della rigata determinatrice, e col vertice nel vertice del cono:

3.° è della specie a curva simile a quella di genere sulla rigata di specie:

4.° ed è della varietà a generatrici variabili, tutte col centro nel centro medesimo del cono direttore.

ESEMPIO QUARTO

I.

89. Nei tre esempii precedenti siamo caduti in tre casi ben distinti tra loro. Nel primo la circonferenza mobile è di ampiezza costante, ed ha sempre il suo centro nel vertice stesso del cono direttore, e sempre un suo punto in comune colla base di questo medesimo cono. Nel secondo esempio la circonferenza mobile è di ampiezza variabile, ma non ha il centro nel vertice del cono, sibbene ha sempre un suo punto in comune colla base del cono, come nel primo. Nel terzo esempio la circonferenza mobile è pure di ampiezza variabile, ma il suo centro è sempre nel vertice del cono, e non ha sempre un suo punto in comune colla base di questo.

Per ultimo facciamo per modo che la circonferenza mobile abbia il suo centro sempre nel vertice del cono direttore, come nel primo e terzo esempio, abbia un suo punto sempre sulla base di

esso medesimo cono, come nel primo e secondo; ma che la sua ampiezza sia variabile, come nel secondo e terzo degli esempii precedenti.

90. Sia il cono direttore dell' anulare particolare un cono retto a base ellittica; e la ellisse che ne è base sia direttrice comune di esso cono direttore, e della rigata determinatrice. Debba inoltre il centro della circonferenza mobile generatrice dell'anulare, stare sempre su di una retta menata pel vertice del cono direttore.

Indichiamo al solito con a l' altezza del cono; e con b e c i semiassi della ellisse che ne è base; e con m ed n le tangenti trigonometriche coll' asse delle z delle projezioni sui piani xz, yz della retta data.

Per questo caso particolare, le prime quattro equazioni (LXXV) saranno le

$$\text{(XC)}\qquad \begin{aligned} b^2\beta^2+c^2\gamma^2-b^2c^2&=0\\ \varepsilon+a&=0\\ b^2\beta+c^2\gamma\gamma'&=0\\ \varepsilon'&=0 \end{aligned}$$

onde poi per la quinta (tenendo conto della prima delle precedenti (XC)) si ha

$$ab^2\beta x+ac^2\gamma y+b^2c^2z=0$$

Le altre tre seguenti saranno

$$\begin{aligned} p-mr&=0\\ q-nr&=0\\ ab^2\beta p+ac^2\gamma q+b^2c^2r&=0 \end{aligned}$$

E queste tre, dando immediatamente $p=q=r=0$, le due (9) e (10) delle (LXXV) diventano

$$\delta=0\,,\quad \alpha=\sqrt{(\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2)}.$$

La funzione φ_3 dunque è uguale a *zero*, e la $\varphi_2=-a$; e per determinare le altre tre, abbiamo le relazioni

$$\begin{aligned} b^2\beta^2+c^2\gamma^2-b^2c^2&=0\\ ab^2\beta x+ac^2\gamma y+b^2c^2z&=0\\ \alpha&=\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Risolute le due prime rispetto a β, γ, e sostituitine i valori nella terza, ed anche in questa posto per ε^2 la a^2, avremo determinate le cinque funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. E risultano

(XCI)

$$\varphi = \frac{c\sqrt{\left(a^2(b^2x^2+c^2y^2)^2 - b^2\left(c^2yz - x\sqrt{a^2b^2x^2+a^2c^2y^2-b^2c^2z^2}\right)^2\right)}}{a(b^2x^2+c^2y^2)}$$

$$\varphi_1 = \frac{-b^2\left(c^2yz - x\sqrt{a^2b^2x^2+a^2c^2y^2-b^2c^2z^2}\right)}{a(b^2x^2+c^2y^2)}$$

$$\varphi_2 = -a$$

$$\varphi_3 = 0$$

$$\varphi_4 = \frac{\sqrt{\left(a\,(a^2+c^2)(b^2x^2+c^2y^2)^2 + b^2(b^2-c^2)\left(c^2yz - x\sqrt{a^2b^2x^2+a^2c^2y^2-b^2c^2z^2}\right)^2\right)}}{a(b^2x^2+c^2y^2)}$$

II.

91. Per avere la equazione dell' anulare particolare di che quì si tratta, basta sostituire nella espressione (LIX) per $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ le effettive funzioni (XCI) ch' esse sono delle x, y, z. Ed in primo facciamovi $\varphi_3=0$; ed osserviamo che essendo per quest' anulare particolare (90) $\alpha=\sqrt{(\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2)}$, e perciò $\varphi_4=\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$, essa espressione (LIX) diventa in primo

$$(x^2+y^2+z^2-(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2))\varphi_4\rho=0$$

la quale può scindersi in tre fattori; il secondo dei quali darebbe $\varphi_4=0$. Fattore questo da rigettarsi; perocchè φ_4 esprimendo il raggio della circonferenza mobile non può essere zero.

L' altro fattore $\rho=0$, equivale (LX) a

$$\frac{\varphi'}{\sqrt{(c^2-\varphi^2)}} \times \sqrt{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}=0$$

che esprime dover essere la funzione φ, ed anche la φ_1 d' indole

essenzialmente reale, quando la superficie si ritenga qual è realmente generata (77).

E resta per espressione della superficie la

$$x^2+y^2+z^2=\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2$$

ossia

$$x^2+y^2+z^2=\varphi_4^2$$

92. Quest' ultima equazione somiglia a quella di una sfera; anzi sarebbe la effettiva di una sfera, se φ_4 fosse costante. Ma la φ_4 è variabile; e nel caso di $b=c$, ritornerebbe costante (90), ed eguale a $\sqrt{(a^2+b^2)}$: e ritorneremmo nel caso del N. 75. E di fatto se fosse $b=c$, la ellisse base del cono direttore, si cangerebbe in un circolo.

93. Pertanto la equazione dell' anulare particolare di cui quì si tratta è

(XCII)

$$a^2(x^2+y^2+z^2-a^2-c^2)(b^2x^2+c^2y^2)^2=b^2(b^2-c^2)\left(c^2yz-x\sqrt{a^2b^2x^2+a^2c^2y^2-b^2c^2z^2}\right)^2$$

Dalla forma della quale equazione si fa manifesto che la superficie ch' essa rappresenta ha più falde; od almeno che ha delle parti interne e delle esterne che debbono tagliarsi per linee multiple.

Le equazioni delle sue tre sezioni principali sono

$$\text{(XCIII)}\quad\begin{array}{ll} \text{sul piano } xy \ldots (x^2+y^2)(b^2x^2+c^2y^2) & =(a^2+b^2)b^2x^2+(a^2+c^2)c^2y^2 \\ \text{sul piano } xz \ldots (x^2+z^2)a^2x^2 & =(a^2+b^2)a^2x^2+(c^2-b^2)c^2z^2 \\ \text{sul piano } yz \ldots (y^2+z^2)a^2y^2 & =(a^2+c^2)a^2y^2+(b^2-c^2)b^2z^2 \end{array}$$

Curve le due ultime entrambe di egual natura: e che insieme colla prima diventano un circolo di raggio $\sqrt{a^2+b^2}$, nel caso di $b=c$.

94. Quì potremmo fare delle osservazioni analoghe a quelle del N. 76, e dei tre seguenti.

Dalle tre ultime equazioni massimamente, si rende manifesto che le curve che esse rappresentano hanno dei punti che non possono appartenere alla superficie anulare generata. E conchiuderemo

che cotesti punti appartengono ad una superficie più vasta dell' anulare medesima generata, la quale ha proprietà con questa comune; ma i punti della quale non però ad essa anulare appartengono.

Le coordinate di cotesti punti renderebbero immaginarie le funzioni φ, φ_1; ma queste debbono essere essenzialmente reali, (91); ed è così che l'analisi ci manifesta non appartenere essi punti all'anulare di che si tratta.

La superficie più vasta, che la trovata equazione (senza tener conto delle funzioni che la generano) può rappresentare, ha la proprietà di avere tutti i suoi punti lontani da un solo e medesimo punto interno che ne è centro per una quantità data dalla formola

(XCI)

$$\frac{\sqrt{\left(a^2(a^2+c^2)(b^2x^2+c^2y^2)^2+b^2(b^2-c^2)(c^2yz-x\sqrt{a^2b^2x^2+a^2c^2y^2-b^2c^2z^2})^2\right)}}{a(b^2x^2+c^2y^2)},$$

distanza che diventa costante, quando $b=c$. E di questa superficie più vasta una zona compresa tra i piani $z=+a$, $z=-a$, si confonde coll' anulare generata medesima.

Di quì è ch' essa superficie più vasta ha questa proprietà; cioè che mentre la distanza di tutti i suoi punti dal punto interno o centro, è variabile, pure quei suoi punti situati tra i piani $z=a$, $z=-a$, e che sono su di un medesimo piano della equazione (90)

$$ab\beta x+ac(c^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}y+bc^2z=0$$

hanno distanza costante dal punto interno o centro: piano questo che può avere tante posizioni diverse, per quanti sono i valori che può ricevere il suo parametro β, da $+c$, sino a $-c$.

III.

95. Per determinare la equazione della rigata determinatrice dell' anulare particolare di che si tratta, senza immergerci in lunghi calcoli, nella (LXVII), poniamo in primo (57, 90) $\varphi_2=-a$; e nel

calcolare le derivate accennate in essa equazione, teniamo conto di ciò che $\varphi'_2=0$; ed inoltre che a causa della prima e terza delle equazioni (XC), è anche

$$\varphi^2=\frac{c^2}{b^2}(b^2-\varphi_1^2)\,,\quad \text{e}\quad \varphi\varphi'=-\frac{c^2\varphi_1\varphi_1'}{b^2}.$$

Ottenghiamo così in primo ridotta la (LXVII) alla

$$a\varphi_1(y-\varphi_1)(b^2-c^2)=(a+z)(a^2+c^2)b^2.$$

E quindi, per φ_1 posta la funzione ch'essa è (XCI) delle x,y,z, ottenghiamo per equazione della rigata determinatrice

(XCIV)

$$(a^2+c^2)(a+z)=(c^2-b^2)\left(y+\frac{b^2(c^2yz-x\sqrt{a^2b^2x^2+a^2c^2y^2-b^2c^2z^2})}{a(b\,x^2+c^2y^2)}\right)\times$$
$$\frac{c^2yz-x\sqrt{a^2b^2x^2+a^2c^2y^2-b^2c^2z^2}}{b^2x^2+c^2y^2}$$

Equazione questa, che ci mostra avere la rigata più falde; ed esserne linea multipla la ellisse base del cono direttore.

Le sezioni principali di questa rigata, sono

(XCV)

sul piano $xy\ldots\big((a^2+b^2)b^2x^2+(a^2+c^2)c^2y^2\big)^2=(b^2-c^2)^2(b^2x^2+c^2y^2)x^2y^2$
sul piano $xz\ldots\big((a^2+b^2)a+(a^2+c^2)z\big)ax^2\quad=(b^2-c^2)c^2z^2$
sul piano $yz\ldots\big((a^2+c^2)a+(a^2+b^2)z\big)ay^2\quad=(c^2-b^2)b^2z^2$

delle quali le due ultime mostrano essere di ugual natura le sezioni sui piani verticali.

96. Puossi osservare, che se $b=c$, le due ultime equazioni danno $z=-a$; e che a $z=-a$, si riduce allora ancora la espressione (XCIV) della rigata determinatrice.

Le falde della rigata dunque, di cui la base del cono è una linea multipla, quando è $b=c$, si abbattono sul piano di essa medesima base, riducendosi così esse falde ad una sola e medesima.

Questo fatto illustra ciò che fu detto al N. 79.

IV.

97. In egual guisa si determinerebbe la equazione di ogni altra inviluppata dell' anulare: ed ancora quelle delle sue caratteristiche, e rigate ad elementi normali a quelli delle inviluppate. Ma a determinar queste non ulteriormente ci fermeremo.

Pertanto diremo che l' anulare particolare della quale quì ci siamo occupati,

1.° è del gruppo a cono direttore retto a base ellittica:

2.° è del genere a curva ellittica sul cono direttore:

3.° è della specie a curva ellittica sulla rigata determinatrice, parallela a quella di genere:

4.° ed è della varietà a curva dei centri nel vertice medesimo del cono direttore.

ARTICOLO VII.

Di alcune Tribù particolari di Anulari di Quinta Classe: e quindi delle anulari di Quinta Classe Sferoidiche in generale.

I.

98. Le anulari contemplate nei quattro esempii precedenti sono tutte di una *medesima tribù o stirpe*; perciocchè (51) hanno tutte la curva dei centri della circonferenza mobile sul cono direttore medesimo (73, 82, 87, 90).

È evidente che ove si volessero le espressioni generali spettanti ad anulari tutte di questa tribù, bisognerebbe porre in tutte esse espressioni, inveee di φ_3 lo zero: nè ci arresteremo intorno a tutto ciò; ma solo prenderemo in considerazione la espressione generale della superficie propriamente detta di cotesta Tribù di anulari.

99. Nella (LIX) poniamo $\varphi_3=0$. Ottenghiamo per espressione analitica generale, spettante all'universalità delle anulari della *Tribù a curva dei centri sul cono direttore medesimo*, la

(XCVI)

$$\begin{gathered}((x-\varphi)\varphi+(y-\varphi_1)\varphi_1+(z-\varphi_2)\varphi_2)2\varphi_1\rho \\ +((x-\varphi)^2+(y-\varphi_1)^2+(z-\varphi_2)^2)\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=0.\end{gathered}$$

Questa equazione od espressione può essere soddisfatta da ciascuno dei due fattori in cui è decomponibile; dei quali quello $\rho=0$, ossia (LX),

(XCVII) $$(\varphi\varphi_1'-\varphi_1\varphi')^2+(\varphi_1\varphi_2'-\varphi_2\varphi_1')^2+(\varphi_2\varphi'-\varphi\varphi_2')^2=0$$

è come una relazione di condizione tra le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, la quale può dinotare o l' indole reale od immaginaria di esse medesime funzioni (come nell' esempio primo , specialmente s' è dichiarato) , od una relazione tra le coordinate x, y, z, esprimente, che ove le coordinate della equazione nascente dalla espressione

(XCVIII)

$$\begin{gathered}2((x-\varphi)\varphi+(y-\varphi_1)\varphi_1+(z-\varphi_2)\varphi_2)\varphi_4 \\ +((x-\varphi)^2+(y-\varphi_1)^2+(z-\varphi_2)^2)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=0\end{gathered}$$

soddisfano ad essa relazione , quivi è la superficie anulare particolare generata , e che ove le coordinate di essa medesima equazione non soddisfano ad essa relazione , quivi vi saranno punti appartenenti ad altra superficie avente alcune proprietà in comune coll' anulare , e più vasta di essa ; e della quale essa medesima anulare è una zona : zona cui appartengono alcune proprietà ad essa esclusive , le quali *possono non appartenere* ad ogni altro punto della superficie più vasta rappresentata dalla sola (XCVIII) , quando non si tien conto della $\rho=0$, o ciò che è lo stesso, quando non si tenga conto delle funzioni generatrici della equazione algebrica , che da essa espressione medesima risulta.

II.

100. Supponiamo ora che nella (XCVI) sia in oltre

(XCIX) $$\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=\varphi_4.$$

Questa relazione esprime che il raggio della circonferenza mobile ,

generatrice dell' anulare è sempre uguale alla distanza di ciascuna retta della rigata determinatrice, dal vertice del cono direttore. E però l' anulare non ha più allora una linea dei centri, ma invece un punto dei centri, che è il vertice medesimo del cono.

E pertanto si avranno allora anulari di questa famiglia o *Stipite*; cioè *a centro della circonferenza mobile nel vertice del cono direttore.* E la espressione analitica delle anulari di questo stipite, sarà (come risulta dalla (XCVI)),

(C) $$(x^2-\varphi^2+y^2-\varphi_1^2+z^2-\varphi_2^2)\rho=0$$

ossia

$$x^2+y^2+z^2=\varphi_4^2$$

ma colla quale esister debbe la relazione, come sopra, $\rho=0$.

Le anulari di questa famiglia potrebbonsi dire *Sferoidiche*; perocchè hanno tutte, come ne indica la espressione, i loro punti distanti per una quantità, data dalla funzione $\varphi_4=\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2}$, da un solo e medesimo punto interno. E se potessero così immaginarsi i determinanti della superficie, da risultare determinate per modo le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ da essere la somma $\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2$, di dimensioni rispetto alle coordinate x, y, z, non maggiore del secondo grado, la espressione

$$x^2+y^2+z^2=\varphi_4^2$$

potrebbe rappresentare una superficie di secondo ordine; ma di essa potrebbe una zona sola appartenere all' anulare particolare di quinta classe; e secondo che ne esprimerebbe il fattore di condizione $\rho=0$. E di ciò ne abbiam veduto dei casi negli esempii precedenti.

III.

101. La espressione (C) è quella di un anulare *sferoidica* col centro di tutte le circonferenze generatrici mobili *nel vertice medesimo* del cono direttore; e le quali possono essere parti di più vaste superficie godenti proprietà in comuni con esse; e le quali parti vengono mostrate dal fattore di condizione $\rho=0$. Ma possono esservi

altre anulari particolari pur sferoidiche, le quali non hanno punto i centri delle loro circonferenze mobili nel vertice medesimo del cono direttore, anzi li hanno fuori di esso; e le quali possono essere zone di più vaste superficie: ed anche possono esservene di altra tribù di anulari di quinta classe diversa da sferoidiche, e le quali pure sono parti o zone di altra superficie più vasta, che in essa zona ha proprietà comuni a tutti gli altri suoi punti, ed alcuna a questi non comune, e che appartiene ai punti di essa zona soltanto. Ciò mostreremo; e così chiuderemo questo capo.

102. Siano in primo tali le forme delle funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, da fare risultare zero i polinomii che nella (LIX) moltiplicano φ_3. Avranno luogo tra esse funzioni le tre relazioni

$$\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'=0$$

$$\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'=0$$

$$\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'=0$$

Effettuiamovi le derivate, e le riduzioni. Diverranno

$$\text{(CI)}\qquad \begin{aligned}(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\varphi'&=\varphi\,(\varphi_1\varphi_1'+\varphi_2\varphi_2')\\(\varphi^2+\varphi_2^2)\varphi_1'&=\varphi_1(\varphi\varphi'+\varphi_2\varphi_2')\\(\varphi^2+\varphi_1^2)\varphi_2'&=\varphi_2(\varphi\varphi'+\varphi_1\varphi_1')\end{aligned}$$

nelle quali le funzioni sono separabili. Onde integratele per logaritmi; e quindi tornato dai logaritmi ai numeri, otteughiamo

$$\begin{aligned}2A\varphi&=\varphi_1^2+\varphi_2^2\\2B\varphi_1&=\varphi^2+\varphi_2^2\\2C\varphi_2&=\varphi^2+\varphi_1^2\end{aligned}$$

nelle quali A,B,C sono tre costanti arbitrarie.

Queste tre equazioni sommate danno in fine la relazione

$$\text{(CII)}\qquad \varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2=A\varphi+B\varphi_1+C\varphi_2$$

Onde (47) dovrà essere ancora

$$\beta^2+f^2+f_1^2=A\beta+Bf+Cf_1.$$

Ed appuriamo che, onde i polinomii che moltiplicano la φ_3 nel primo membro della (LIX) diventino *zero*, la curva di genere dell' anulare (3, 44, 63) debb' esser tale, che la distanza di ciascun suo punto dal vertice del suo cono direttore sia sempre eguale alla somma dei prodotti di ciascuna coordinata di esso medesimo punto per una costante arbitraria: od anche per una funzione arbitraria se le derivate (CI) ammettessero primitive singolari.

E pertanto la espressione analitica di quella tribù di anulari di quinta classe, di cui le curve di genere hanno tutti i punti distanti dal vertice del cono per la somma dei prodotti di ciascuna coordidinata di un suo medesimo punto per una costante arbitraria, è la

(CIII)
$$\left[\begin{array}{c}(2(x-\varphi)\varphi+2(y-\varphi_1)\varphi_1+2(z-\varphi_2)\varphi_2)\varphi_1+\\((x-\varphi)^2+(y-\varphi_1)^2+(z-\varphi_2)^2+\varphi_3^2)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\end{array}\right].\rho=0.$$

E questa espressione dando luogo alla solita relazione di condizione (99) $\rho=0$, che mostra, o qual debba essere l'indole delle funzioni φ, φ_1, φ_2, o delle relazioni tra le variabili di cui esse sono funzioni, potremo conchiudere, come abbiamo enunciato (101), potere le anulari di questa tribù essere parti di superficie più vaste, aventi proprietà comuni con esse: e le equazioni delle quali superficie più vaste sono date dall' altro fattore della espressione di sopra (CIII) della superficie.

103. Per un esempio di anulari di questa tribù, vogliasene una del medesimo gruppo di quelle considerate nei tre primi esempii riportati innanzi; cioè a cono direttore retto a base circolare. Le due prime delle equazioni (LXXV), che sono quelle della direttrice comune del cono direttore, e della rigata determinatrice (70), saranno le due

$$a^2(\beta^2+\gamma^2)-b^2\varepsilon^2=0$$
$$a^2(l\beta+m\gamma+n\varepsilon)-(a^2+b^2)\varepsilon^2=0$$

nelle quali l, m, n potranno anche essere *zero*.

E se trattandosi di anulari della medesima tribù, ma di altro gruppo delle contemplate innanzi, si conoscessero per qualunque mezzo esplicitamente due delle funzioni φ, φ_1, φ_2, che entrano nella composizione della espressione (CIII) dell'anulare, la terza si avrebbe dalla (CII). Così supponiamo che fossero state conosciute esplicitamente le φ, φ_1; e che fosse $\varphi=mx$, e $\varphi_1=ny$, essendo m, n, dei semplici rapporti. Dovrebbe essere

$$\varphi_2=\tfrac{1}{2}C\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}C^2+mx(A-mx)+ny(B-ny)}$$

Date poi le φ, φ_1 esplicitamente, od anche le φ_3, φ_4, potrebbonsi sempre determinare i determinanti geometrici dell' anulare particolare della tribù di che si tratta, per la quale le φ, φ_1, φ_3, φ_4 sarebbero le date funzioni, o la φ_2 quella dipendente da φ, φ_1 nel modo suddetto.

Posto

$$\varphi(x,y,z)=\beta\ ,\quad \varphi_1(x,y,z)=\gamma\ ,\quad \varphi_2(x,y,z)=\varepsilon$$

e trattate queste simultaneamente colla (LXI)

$$\beta^2\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)'z+\gamma^2\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)'x+\varepsilon^2\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)'y=0$$

per modo da eliminarne x, y, z, otterremo una sola equazione

$$F(\beta,\gamma,\varepsilon)=0$$

senza x, y, e z, che insieme colla

$$\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2=A\beta+B\gamma+C\varepsilon$$

darebbero la curva di genere dell' anulare, e questa sarebbe la direttrice del cono direttore. La (LXVII), per la sostituzione di φ, φ_1, φ_2, φ_3 darebbe la rigata determinatrice; ed essa colla (LXX), od anche colla (LXIV) dopo sostituitevi le φ, φ_1, φ_2 darebbero la curva di specie, o ciò che è lo stesso la linea di contatto dell' anulare colla rigata determinatrice; e sostituito non solo le φ, φ_1, φ_2, ma ancora la φ_4 nella (LXXI) si avrebbe la rigata ad elementi paralleli a quelli della determinatrice, ed essa colla già calcolata (LXX) darebbero la curva di varietà, ossia la curva dei centri dell'anulare.

IV.

104. Perchè s' abbia la tribù di anulari della espressione (CIII), è d' uopo che $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, abbiano il legame espresso (102) dalla relazione (CII)

$$\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2=A\varphi+B\varphi_1+C\varphi_2.$$

Ma le φ_3, e φ_4 possono essere qualunque.

Possiamo supporre dunque che fosse

$$\varphi_4=\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}.$$

E supponiamo che così sia di fatto. La (CIII) diventerà

$$\text{(CIV)} \qquad x^2+y^2+z^2=\varphi_4^2-\varphi_3^2$$

e restando ferma la relazione di condizione $\rho=0$.

E però, come enunciammo (101), senza che i centri della circonferenza mobile generatrice dell' anulare stiano nel vertice del suo cono direttore, (lo che richiederebbe $\varphi_3=0$) la superficie generata da essa circonferenza mobile, può appartenere ad una *sferoide* di raggio variabile $\sqrt{\varphi_4^2-\varphi_3^2}$; e potrebbe appartenere ancora ad una sfera, quando fosse $\varphi_4^2-\varphi_3^2$, ossia $\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2-\varphi_3^2$ una quantità costante.

105. Pertanto concluderemo che l' anulure di quinta classe appartiene ad una sferoide, sempre che sia ad un tempo (99, 100)

$$\varphi_4=\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}, \text{ e } \varphi_3=0$$

od invece (104)

$$\varphi_4=\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}, \text{ e } \varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2=A\varphi+B\varphi_1+C\varphi_2.$$

L' anulare di quinta classe dunque *può appartenere* ad una sferoide quando la circonferenza mobile che è sua generatrice ha raggio in ogni posizione uguale alla distanza del corrispondente punto della curva di genere dal vertice del cono; e vi apparterrà di fatto, quando inoltre ha luogo

$$\varphi_3=0, \text{ oppure } \varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2=A\varphi+B\varphi_1+C\varphi_2.$$

E nel primo caso il centro della circonferenza mobile, generatrice dell'anulare, è nel vertice del cono direttore; nel secondo caso è fuori di esso.

E potremo dire che l' anulare *sferoidica* può esser tale che la sua circonferenza mobile generatrice abbia sempre il centro di posizione fissa, o che l' abbia di posizione variabile. Di sferoidi del primo caso possono esservene in anulari di qualunque gruppo e genere; di quelle del secondo caso possono esservene di qualunque gruppo bensì, ma non di qualunque genere: dovendo essere questi, tali che la distanza di ciascun punto della curva di genere dal vertice del cono direttore sia sempre uguale alla somma dei prodotti di ciascuna coordinata di esso medesimo punto per una costante arbitraria: o forse anche (103) per una funzione arbitraria, dipendendone la esistenza dalla esistenza di soluzioni singolari di certe equazioni derivate, composte da funzioni equivalenti a quelle medesime coordinate.

CAPO TERZO

DELLE ANULARI DI SESTA CLASSE.

I.

106. Dato il cono direttore dell' anulare, immaginiamo ad esso menato un piano tangente: e su questo stia la circonferenza generatrice dell' anulare, e con essa quella retta ad essa tangente, la quale è perpendicolare al lato di contatto del piano col cono; e che però genera la rigata determinatrice dell' anulare (1), mentre che la circonferenza, che tocca, genera essa anulare medesima.

Supponiamo che in una seconda posizione del piano tangente, quella retta generatrice della rigata determinatrice dell' anulare incontri l' altra ch' era sulla prima posizione del piano istesso; e che così in tutte le infinite posizioni del piano tangente, quella retta, in ciascuna, sia incontrata da una sua posizione immediatamente antecedente, e da una sua posizione immediatamente seguente. Tutti i punti d' intersezione di essa retta con se medesima nelle successive sue posizioni costituiranno una curva; ed è questa come la direttrice della rigata determinatrice dell' anulare: e n' è lato di regresso. E se immaginiamo data una tal curva, che può riguardarsi come direttrice della rigata determinatrice, ed intendiamo menata una retta ad essa tangente, una tal retta toccherà il cono direttore dell' anulare, e sarà normale al lato di esso cono che passa pel punto del contatto; e viceversa, se intendiamo menata una retta normale ad un lato del cono direttore nel piano che lo tocca secondo esso lato, e la quale sia retta della rigata determinatrice; una tal retta

toccherà ancora la detta curva, che può aversi come direttrice della rigata determinatrice medesima.

Ma, come dichiarammo innanzi (2), quando le diverse rette di una rigata determinatrice di un' anulare a cono direttore sono a due a due su di un piano, e costituiscono per essa determinatrice una rigata sviluppabile, l' anulare è di sesta classe.

Dunque dal detto di sopra conchiuderemo, che nelle anulari di Sesta Classe la curva direttrice della sua rigata determinatrice non può essere qualunque; e che neppure la linea del contatto di tutta essa col cono direttore può essere qualunque; e che tali due linee dipendono l' una dall'altra. E la espressione di questa dipendenza ci aprirà la strada ad accommodare alle *Anulari di Sesta Classe* tutte quelle espressioni ritrovate nel Capo Primo, le quali appartengono (2) ad anulari qualunque a cono direttore, comunque siano di quinta, sesta, o settima classe.

107. Supponiamo che sia data di fatto quella curva, la quale può aversi come direttrice della rigata determinatrice di un'Anulare di Sesta Classe, e che in sostanza è il lato di regresso di essa rigata determinatrice, la quale per le anulari di Sesta Classe, è una superficie sviluppabile. E le equazioni di una tal curva direttrice, o lato di regresso, sieno le due

$$\text{(CV)}\qquad \begin{cases} y=F(x) \\ z=F_1(x) \end{cases}$$

Le equazioni della retta tangente a questa curva sono le due

$$\text{(CVI)}\qquad \begin{cases} y-F=(x-\theta)F' \\ z-F_1=(x-\theta)F_1' \end{cases}$$

nelle quali le coordinate del punto di contatto sono le tre θ, $F(\theta)$, $F_1(\theta)$; e delle quali le due ultime abbiamo indicate colle sole lettere F, F_1.

108. Se le equazioni (CV) esprimono realmente, come abbiam supposto, la linea di regresso della rigata determinatrice sviluppabile dell' anulare, è chiaro che la retta rappresentata dalle (CVI),

e qualunque sia la θ, debbe risultare non solo tangente al cono direttore di essa medesima anulare, ma debbe ancora essere perpendicolare al suo lato che passa pel punto di contatto (106).

Ma abbiamo già trovate (4, 10) per equazioni di una retta che tocca il cono direttore, e che è normale a quel suo lato che passa pel punto del contatto, le due (L)

$$\begin{cases} f_1(\beta x+fy+f_1z)-(\beta^2+f^2+f_1^2)\omega=0 \\ (ff_1'-f_1f')x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0 \end{cases}$$

nelle quali $\frac{\beta\omega}{f_1}$, $\frac{f\omega}{f_1}$, ω, sono le coordinate del punto di contatto, e β, f, f_1 le coordinate di quel punto della curva direttrice del cono al quale si appoggia quel suo lato che passa pel punto di contatto delle dette coordinate.

Dunque la curva delle equazioni (CV) apparterrà realmente, secondo la ipotesi, alla linea di regresso della determinatrice sviluppabile, quando le forme delle funzioni F, F_1 che le determinano, sieno tali da far essere le equazioni (CVI) della retta ad essa linea tangente equivalenti alle due ultime (L) scritte equazioni.

Ora per determinare le forme effettive delle funzioni F, F_1, per modo che soddisfacciano alla enunciata condizione, determiniamo le projezioni della retta espressa dalle (L) rispettivamente sui piani coordinati xy, xz. Sono le equazioni di tali projezioni le due.

(CVII)
$$\begin{cases} y+\dfrac{((f-\beta f')\beta+(ff_1'-f'f_1)f_1)}{((f-\beta f')f+(f_1-\beta f_1')f_1)}x-\dfrac{(f-\beta f')D^2\omega}{f_1((f-\beta f')f+(f_1-\beta f_1')f_1)}=0 \\ z+\dfrac{((f_1-\beta f_1')\beta-(ff_1'-f'f_1)f)}{((f-\beta f')f+(f_1-\beta f_1')f_1)}x-\dfrac{(f_1-\beta f_1')D^2\omega}{f_1((f-\beta f')f+(f_1-\beta f_1')f_1)}=0 \end{cases}$$

nelle quali, al solito D sta per $\sqrt{(\beta^2+f^2+f_1^2)}$. Ed è manifesto che se le (CVI), ossia le due

$$\text{(CVIII)} \qquad \begin{cases} y-F'.x-(F-F'.\theta)=0 \\ z-F_1'.x-(F_1-F_1'.\theta)=0 \end{cases}$$

fossero identiche alle (CVII), esse medesime (CVI) equivarrebbero alle (L).

Determiniamo dunque così le forme delle F, F_1, da risultare le (CVIII) identiche alle (CVII). Ora perchè ciò abbia luogo, è necessario, come è manifesto, che esistano simultaneamente le quattro equazioni,

(CIX)
$$F' = -\frac{(f-\beta f')\beta + (ff_1' - f'f_1)f_1}{(f-\beta f')f + (f_1-\beta f_1')f_1};\quad F - F'.\theta = \frac{(f-\beta f')D\omega}{f_1((f-\beta f')f + (f_1-\beta f_1')f_1)}$$
$$F_1' = -\frac{(f_1-\beta f_1')\beta - (ff_1' - f'f_1)f}{(f-\beta f')f + (f_1-\beta f_1')f_1};\quad F_1 - F_1'.\theta = \frac{(f_1-\beta f_1')D^2\omega}{f_1((f-\beta f')f + (f_1-\beta f_1')f_1)}$$

E le due prime di queste danno immediatamente

(CX)
$$F = \int \frac{\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)' + f_1^3\left(\frac{f}{f_1}\right)'}{f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)' + f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'} + K,\quad F_1 = \int \frac{\beta^3\left(\frac{f_1}{\beta}\right)' + f^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'}{f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)' + f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'} + K_1$$

ove le derivate sono prese rispetto a qualunque variabile; e nelle quali K, K_1 sono costanti arbitrarie.

Le (CX) dunque danno le forme effettive delle funzioni F, F_1, perchè le (CV) sieno le equazioni della linea di regresso della rigata sviluppabile, determinatrice dell' anulare di sesta classe.

Dalle (CX) si vede ancora, ciò che abbiamo già conchiuso al N.° 106; cioè che la linea direttrice della rigata determinatrice non può essere qualunque; e vedesi inoltre come essa dipenda dalle forme delle altre funzioni f, f_1, date dalle equazioni (1)

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f_1(x) \end{cases}$$

della curva direttrice del cono direttore (3).

109. Le (CX) ci palesano manifestamente, che le ordinate F, F_1 di un' individuato punto del lato di regresso o direttrice della rigata determinatrice dipendono in sostanza dalle funzioni f, f_1 della β, e però dal valore individuato di questa medesima β.

Sia dunque β un'ascissa sull'asse coordinato delle x: e potremo supporre esser questa un' ascissa comune alla curva direttrice del cono direttore, data dalle equazioni (I); ed alla linea di regresso, o curva direttrice della rigata determinatrice di un' anulare di sesta classe, le coordinate della quale corrispondenti a quella ascissa β, saranno le F, F_1 date dalle (CX).

Per un' anulare qualunque di Sesta Classe dunque, se

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=f_1(x) \end{cases}$$

sono le equazioni della curva direttrice del suo cono direttore, quelle della curva direttrice della sua rigata determinatrice, che n' è insieme sua linea di regresso, saranno le due

$$\text{(CXI)} \quad \begin{cases} y=K-\int \dfrac{(f(x)-xf'(x))x+(f(x)f_1'(x)-f_1(x)f'(x))f_1(x)}{(f(x)-xf'(x))f(x)+(f_1(x)-xf_1'(x))f_1(x)} \\[2ex] z=K_1-\int \dfrac{(f_1(x)-xf_1'(x))x-(f(x)f_1'(x)-f_1(x)f'(x))f(x)}{(f(x)-xf'(x))f(x)+(f_1(x)-xf_1'(x))f_1(x)} \end{cases}$$

Dalle quali equazioni discende il seguente

Teorema. *Per tutte le immaginabili anulari di Sesta Classe, che ammettono un medesimo cono direttore, potranno esservi infinite rigate determinatrici diverse; ma delle quali tutte le coordinate di un medesimo nome delle loro* linee di regresso, *corrispondenti ad una medesima ascissa*, *differiranno tra loro per quantità costanti.*

110. Da quelle equazioni, delle (CIX), nelle quali è contenuta la ω, eliminiamone la θ visibile, e risolviamo per rispetto a ω la equazione risultante. Ottenghiamo

$$\omega=\frac{f_1((f-\beta f')f+(f_1-\beta f_1')f_1)(FF_1'-F_1F')}{((f-\beta f')F_1'-(f_1-\beta f_1')F')D^2};$$

od anche più semplicemente, ponendo per F', F'_1, nel denominatore, i loro valori espressi nelle prime due (CIX),

$$(\text{CXII}) \qquad \omega = f_1\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)' + f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)\frac{FF_1' - F_1F'}{(ff_1' - f'f_1)D^2};$$

ove le derivate sono prese rispetto a qualunque variabile.

E pertanto, essendo (4) $\frac{\beta\omega}{f_1}$, $\frac{f\omega}{f_1}$, ω, le coordinate del punto di contatto della individuata retta della rigata determinatrice, col cono direttore, il quale giace sul lato di esso che passa per l'individuato punto della sua curva direttrice di coordinate di ascissa β, conchiuderemo, dall' ultima espressione, ciò che conchiudemmo per altra via al N. 106; cioè che la linea del contatto della rigata determinatrice di un' anulare qualunque di Sesta Classe col suo cono direttore, non può essere qualunque, ma dipende dalla linea di regresso di essa medesima determinatrice.

Epperò nelle anulari di sesta classe la natura della rigata determinatrice, e della sua linea di contatto col cono direttore, dipendono in tutto e per tutto dalla natura di questo; e per un medesimo cono direttore, solo di posizione possono esse linee variare.

111. La (CXII) dà il valore di ω corrispondente ad un individuato valore di β. Sia β un ascissa qualunque. Così considerata la β, otterremo immediatamente la linea di contatto della rigata determinatrice dell' anulare di Sesta Classe col suo cono direttore. E quando le equazioni della direttrice del cono direttore sono le due (I)

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f_1(x) \end{cases}$$

sono equazioni della linea di contatto della rigata determinatrice dell' anulare di Sesta Classe, col suo cono direttore, le due

$$(\text{CXIII}) \begin{cases} y = \dfrac{f(x)\big((f(x) - xf'(x))f(x) + (f_1(x) - xf_1'(x))f_1(x)\big)}{(x^2 + f(x)^2 + f_1(x)^2)(f(x)f_1'(x) - f_1(x)f'(x))}\, S(x) \\[2ex] z = \dfrac{f_1(x)\big((f(x) - xf'(x))f(x) + (f_1(x) - xf_1'(x))f_1(x)\big)}{(x^2 + f(x)^2 + f_1(x)^2)(f(x)f_1'(x) - f_1(x)f'(x))}\, S(x) \end{cases}$$

nelle quali la $S(x)$ sta scritta invece del binomio

(CXIV)

$$S(x)=\frac{(f(x)-xf'(x))x+(f(x)f_1'(x)-f_1(x)f'(x))f_1(x)}{(f(x)-xf'(x))f(x)+(f_1(x)-xf_1'(x))f_1(x)}\times$$

$$\left(K_1-\int\frac{(f_1(x)-xf_1'(x))x-(f(x)f_1'(x)-f_1(x)f'(x))f(x)}{(f(x)-xf'(x))f(x)+(f_1(x)-xf_1'(x))f_1(x)}\right)$$

$$-\frac{(f_1(x)-xf_1'(x))x-(f(x)f_1'(x)-f_1(x)f'(x))f(x)}{(f(x)-xf'(x))f(x)+(f_1(x)-xf_1'(x))f_1(x)}\times$$

$$\left(K-\int\frac{(f(x)-xf'(x))x+(f(x)f_1'(x)-f_1(x)f'(x))f_1(x)}{(f(x)-xf'(x))f(x)+(f_1(x)-xf_1'(x))f_1(x)}\right)$$

II.

112. Dato il cono direttore di un' anulare di Sesta Classe, e data la linea di regresso della sua rigata determinatrice, potrebbe dimandarsi in qual punto essa linea di regresso è toccata da quella retta di essa determinatrice, alla quale essa linea appartiene, che tocca il cono direttore in un punto di quel suo lato che passa per l'individuato punto di ascissa β della curva direttrice di esso cono; ossia che è normale ad esso suo lato che passa per esso medesimo individuato punto di ascissa β.

Per avere l'ascissa del dimandato punto della linea di regresso, basta eliminare la ω da quelle delle equazioni (CIX) che contengono ω e θ, e quindi risolvere la equazione risultante rispetto a θ. Otterrassi

(CXV)
$$\theta=\frac{(f-\beta f')F_1-(f_1-\beta f_1')F}{(f-\beta f')F_1'-(f_1-\beta f_1')F'}.$$

E questo valore di θ risolve il problema. Difatto posti in quest'ultima espressione per F, F_1, F', F_1' i valori datine dalle (CIX) e (CX) si avrà θ tutta in funzione di β: e questo valore di θ tutto in funzione di β sarà l'ascissa dell'individuato punto richiesto della linea di regresso. Nelle (CXI), per x si ponga l'ottenuto valore

di θ: ed i valori che se ne ottengono per y, z, saranno le $F(\theta), F_1(\theta)$, o le due coordinate del punto richiesto.

E viceversa dato un' individuato punto della curva di regresso, pel quale passa la retta della rigata determinatrice, potrebbe determinarsi il punto di contatto di essa retta col cono direttore. Dato il punto della curva di regresso, sarebbero dati θ, $F(\theta)$, $F_1(\theta)$ sue coordinate; e quindi per la (CXV) si conoscerebbe β: ed anche $f(\beta). f_1(\beta)$. Però nella espressione di ω (CXII) sarebbe tutto noto; e si otterrebbe ω tutta in funzione di θ: e così in funzione di θ le $\frac{\beta\omega}{f_1(\beta)}$, e $\frac{f(\beta).\omega}{f_1(\beta)}$, che sono colla β le coordinate del punto richiesto.

III.

113. Abbiamo già enunciato (106), che la espressione della dipendenza tra la curva direttrice, o lato di regresso della rigata determinatrice, e la linea di suo contatto col cono direttore ci avrebbe aperta la strada ad accommodare alle anulari di sesta classe le espressioni pertinenti alla universalità delle anulari a Cono Direttore, nel Capo Primo trovate. Ed ora ciò si rende manifesto dopo il fin quì detto. Difatti essa dipendenza equivale (111) alla relazione (CXII), che dà ω.

E conchiuderemo che all' altezza ω sul piano xy, del punto assunto (4) sulla retta del cono direttore (3) di equazioni (II),

$$\begin{cases} \beta y - f x = 0 \\ \beta z - f_1 x = 0 \end{cases}$$

compete il valore od espressione

$$\omega = f_1\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)' + f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)\frac{FF_1' - F_1F'}{(ff_1' - f_1f')D^2}$$

quando l' anulare avente quel cono per cono direttore è un' anulare di Sesta Classe. E che però per accommodare le espressioni pertinenti ad anulari qualunque a cono direttore, e le quali nel Capo Primo abbiamo trovate, alle anulari di Sesta Classe, è necessario porre in

tutte esse medesime espressioni, dapertutto invece di ω il notato valore (CXII) ad essa competente.

Ma al N. 12 ponemmo

$$\Delta=\frac{\omega D}{f_1}-\alpha$$

Dunque per le anulari di Sesta Classe sarà

$$\Delta=\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)\frac{FF_1'-F_1F'}{(ff_1'-f'f_1)D}-\alpha,$$

ove per F, F_1 debbono intendersi sostituite le funzioni (CX) ch'esse sono della β, ed anche delle f, f_1 funzioni di essa medesima β. Talchè se denoteremo con S, il binomio $FF_1'-F_1F'$; sarà

$$\text{(CXVI)}\qquad \Delta=\frac{\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)S}{(ff_1'-f'f_1)D}-\alpha:$$

ed in questa debbe intendersi posto (12) per D,

$$D=\sqrt{\beta^2+f^2+f_1^2}$$

e per la $S(\beta)$, o semplicemente S, la (111)

(CXVII)

$$S=\frac{\beta^3\left(\frac{f_1}{\beta}\right)'+f^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'}{f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'}\left[\int\frac{\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'+f_1^3\left(\frac{f}{f_1}\right)'}{f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'}+K\right]-$$

$$-\frac{\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'+f_1^3\left(\frac{f}{f_1}\right)'}{f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'}\left[\int\frac{\beta^3\left(\frac{f_1}{\beta}\right)'+f^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'}{f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'}+K_1\right].$$

E sostituito esso valore della Δ, in cui le D, S, hanno il detto significato, nelle espressioni analitiche nel Capo Primo trovate, otterremo quelle relative *non più ad un' anulare qualunque a cono direttore*, *ma invece ad una qualunque di quelle di Sesta Classe.*

ARTICOLO I.

Espressione dell' Anulare generale di Sesta Classe.

I.

114. Pel detto nel N.° precedente è chiaro che dalla espressione di una individuata circonferenza di un' anulare qualunque a cono direttore, dedurremo quella di una individuata circonferenza dell' anulare generale di sesta classe, ponendo nella prima delle (XX) per Δ il suo valore (CXVI). Facciamo dunque una tal sostituzione: e dopo moltiplichiamo la trasformata per $(ff_1'-f'f_1)^2 D$, ossia per $f^4\left(\frac{f_1}{f}\right)^{\prime 2} D$: e quindi passiamo nel primo membro tutti quei termini della risultante che conterranno le x, y, z, meno quelli che saranno moltiplicati per $\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right) S$. Fatto tutto ciò, ed alcune riduzioni che si presentano, otterremo in fine

(CXVIII)

$$\left.\begin{array}{l} \left[(Dx+2\alpha\beta)R-2\delta\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)\right]f^4\left(\frac{f_1}{f}\right)^{\prime 2}Dx \\ \left[(Dy+2\alpha f)R-2\delta\left(\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'+f_1^3\left(\frac{f}{f_1}\right)'\right)\right]f^4\left(\frac{f_1}{f}\right)^{\prime 2}Dy \\ \left[(Dz+2\alpha f_1)R-2\delta\left(\beta^3\left(\frac{f_1}{\beta}\right)'+f^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'\right)\right]f^4\left(\frac{f_1}{f}\right)^{\prime 2}Dz \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -\delta^2 D^2 R f^4\left(\frac{f_1}{f}\right)^{\prime 2} \\ -\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)^2 S^2 R \\ +2\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)f^2\left(\frac{f_1}{f}\right)' SR\times \\ (\beta x+fy+f_1 z+D\alpha) \end{array}\right.$$

$$f^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'x+f_1^2\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'y+\beta^2\left(\frac{f}{\beta}\right)'z=0.$$

E sono queste le espressioni analitiche di quella individuata circonferenza generatrice di un' anulare qualunque di sesta classe, di cui il piano tocca la curva del cono direttore di essa anulare, nel punto delle coordinate $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$; e tocca ad un tempo esso cono

lungo quella sua retta, che passa per esso medesimo punto. In esse x, y, z, sono le coordinate riferite a tre assi coordinati ortogonali la di cui origine è nel vertice medesimo del cono; D,R,S, stanno pei polinomii indicati innanzi (XIII), (CXVII); e δ ed α hanno il significato parimenti detto innanzi (9).

115. In ordine alle x, y, z, e β, δ, α contenute nelle (CXVIII), potremmo fare un ragionamento perfettamente analogo a quello fatto al N.° 46 sulle medesime quantità contenute nella (LVII). Però conchiuderemo anche quì, che a volere abbracciare ad un tempo tutte le circonferenze generatrici, appartenenti ad un'anulare di Sesta Classe, dovremo nelle (CXVIII) considerare la β, non più come avente un valore costante, ma come avente tutti gl' immaginabili valori che possono ad essa competere; e che dovremo ad un tempo considerare le δ, α, come funzioni di essa medesima β. E conchiuderemo del pari che tutti i valori immaginabili che possono alla β competere, sono quelli porti dalla

$$(ff_1'-f'f_1)x+(f_1-\beta f_1')y-(f-\beta f')z=0$$

ovvero dalla seconda delle (CXVIII).

Staranno dunque ancora quì le conseguenze cavate al N.° 47. E le relazioni (LVIII) avranno luogo ancora per le anulari di Sesta Classe.

116. Otterremo dunque dalle espressioni (CXVIII) relative alla individuata circonferenza di un' anulare qualunque di Sesta Classe, la espressione di essa medesima Anulare, da quella circonferenza generata, ponendo nella prima delle (CXVIII), per β la funzione $\varphi(x, y, z)$, per f, l' altra $\varphi_1(x, y, z)$, per f_1 l' altra funzione $\varphi_2(x, y, z)$, e per δ, α, rispettivamente le $\varphi_3(x, y, z)$, $\varphi_4(x, y, z)$, il tutto nel senso delle cose dette al N. 47.

Egli è così che ottenghiamo per espressione analitica di un'anulare qualunque di Sesta Classe la

(CXIX)

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left(2\varphi\varphi_4+x\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2}\right)\rho-2\varphi_3\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\right]\varphi_1^4\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'^2 x\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2}\\
+&\left[\left(2\varphi_1\varphi_4+y\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2}\right)\rho-2\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\right]\varphi_1^4\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'^2 y\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2}\\
+&\left[\left(2\varphi_2\varphi_4+z\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2}\right)\rho-2\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\right]\varphi_1^4\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'^2 z\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2}\end{aligned}\right\}=$$

$$=\begin{cases}-\varphi_3^2\varphi_1^4\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\rho(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)\\
-\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)^2\rho\Sigma^2\\
+2\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\rho\Sigma\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\times\\
\left(\varphi x+\varphi_1 y+\varphi_2 z+\varphi_4\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2}\right)\end{cases}$$

Nella quale sono x, y, z le tre coordinate riferite a tre assi ortogonali colla origine nel vertice del cono direttore dell'anulare; φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 cinque funzioni di esse coordinate da determinarsi; ρ ciò che diventa il polinomio R (XII), quando in luogo di $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$, vi sostituiamo le funzioni effettive $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, ch'esse sono delle x, y, z; e Σ denota ciò che diventa il binomio S (CXVII), quando dopo effettuate le integrazioni accennate, in luogo di β, vi si pone la funzione φ, ch'essa è delle x, y, z.

117. Fermiamoci un tantino a considerare le quantità che entrano nella (CXIX): e potremo conoscere la differenza che stà tra le espressioni delle anulari che ora consideriamo, cioè di Sesta Classe, e quelle di Quinta Classe considerate nel Capo precedente.

Consideriamo in primo che in essa le ρ, Σ, sono composte dalle φ, φ_1, φ_2; e che però contengono le coordinate x, y, z, e quelle costanti o parametri colle quali esse coordinate compongono le dette tre funzioni φ, φ_1, φ_2. Ma la ρ non contiene altre quantità oltre quelle che entrano nella composizione di esse funzioni; mentre che invece la Σ contiene ancora (CXVII) le K, K_1 estranee alla composizione di esse funzioni, e le quali sono due costanti arbitrarie

(108). La espressione (CXIX) non contiene dunque, oltre alle x, y, z, nel modo visibile, che le cinque funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, e le due costanti K, K_1.

Delle dette cinque funzioni, le tre $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, essendo, la prima (47) quella che si ottiene risolvendo rispetto a β la seconda delle (CXVIII), e φ_1, φ_2, quelle che rispettivamente si ottengono dalle funzioni $f(\beta)$, $f_1(\beta)$, quando per β si pone la funzione φ che per essa s' è ottenuta dalla detta risoluzione della seconda delle (CXVIII); è chiaro, che se in essa medesima seconda delle (CXVIII) poniamo per β la φ, e per f la φ_1, e per f_1 la φ_2, la trasformata debbe verificarsi da se. Dunque la (LXI)

$$\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'x+\varphi_2^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'y+\varphi^2\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'z=0$$

è una relazione identica: epperò, anche senza conoscere le tre funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, potremmo eliminarne una, per esempio la φ, dalla espressione generale dell' anulare. Quindi è che delle funzioni comprese nella prima delle (CXIX), le due φ_3, φ_4 sono del tutto indipendenti, e delle altre tre $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, l'una dipende dalle altre due nel modo espresso dall' ultima soprascritta espressione. Dunque il

Teorema. *La espressione analitica* la più generale *delle Anulari di Sesta Classe si presenta con cinque funzioni, delle quali quattro sono arbitrarie, e con due costanti parimenti arbitrarie. Però la più semplice espressione dell' anulare di Sesta Classe ha sei quantità arbitrarie.*

118. Nel capo precedente abbiam veduto (49) che la espressione generalissima delle anulari di Quinta Classe si presenta con sei funzioni arbitrarie, delle quali due si riferiscono alla curva direttrice della rigata determinatrice. Quì, nelle anulari di sesta classe, anche sei sono le quantità arbitrarie, ma di queste quattro sole sono funzioni delle coordinate; altre due sono costanti: e sono queste due costanti che si riferiscono alla curva direttrice della rigata determinatrice. Nelle anulari di Quinta Classe dunque è arbitraria la natura della curva direttrice della rigata determinatrice; nelle anulari di sesta classe è arbitraria di posizione soltanto, ma non di

natura essa curva : perciocchè quelle due funzioni che nella espressione delle anulari di Quinta Classe ad essa si riferiscono e che sono arbitrarie , n' esprimono per lo appunto la natura (63), mentre che le due costanti che nella espressione delle anulari di Sesta Classe , pur si riferiscono ad essa curva , e che pur sono arbitrarie , non ne esprimono la natura , ma solo la posizione (109).

Ed egli è per questa proprietà (di essere per le anulari di Quinta Classe arbitraria di natura la curva direttrice dell' anulare determinatrice , e non così per quelle di Sesta Classe) che nella espressione delle anulari di Quinta Classe le sei funzioni arbitrarie colle quali si presenta possono ridursi a quattro ; mentre che quelle di Sesta Classe non si possono punto ridurre ad avere meno di sei cose arbitrarie.

Nelle anulari di Quinta Classe, possiamo immaginare ad arbitrio una curva qualunque nello spazio , ed assumer questa a direttrice comune del suo cono direttore , e della sua rigata determinatrice ; perocchè ogni curva tracciata su questa — e possono tracciarsene infinite di numero — potrebbe assumersi ad arbitrio, come direttrice di essa medesima rigata determinatrice ; potendo (in essa Classe di anulari) gli elementi di questa trovarsi comunque situati rispetto a tutte esse curve tracciabili su di essa. Ma non è così per le anulari di Sesta Classe. Immaginiamo parimenti ad arbitrio una curva qualunque nello spazio ; ed assumiamola a direttrice del cono direttore di un' anulare di Sesta Classe. Ciò possiamo; ma non possiamo parimenti assumerla sempre , qualunque essa sia, a direttrice ad un tempo della rigata determinatrice ; nel qual caso solo potrebbe la espressione generale di essa anulare ridursi a contenere quattro sole quantità arbitrarie. Imperciocchè se immaginiamo la rigata costituita da tutte le rette che passono per quella curva immaginata ad arbitrio , e che sono tutte tangenti al cono avente essa curva per direttrice e normale ai suoi lati che passano pei punti del contatto; perchè una tal rigata fosse determinatrice di una anulare di Sesta Classe avente quel cono per cono direttore , sarebbe uopo che tra le infinite curve su di essa tracciabili, ve ne fosse una alla quale tutte quelle rette che la sostituiscono fossero tangenti (106) , la qual cosa

non può sempre avvenire, per qualunque curva arbitrariamente assunta a direttrice comune del cono direttore, e della rigata determinatrice dell' anulare.

Dunque nella espressione generale delle anulari di Quinta Classe le sei funzioni arbitrarie possono ridursi a quattro, perchè può sempre assumersi una curva qualunque arbitraria a direttrice comune del cono direttore e della rigata determinatrice; ma nella espressione delle anulari di Sesta Classe le sei quantità arbitrarie, che essa comprende, non possono punto ridursi a numero minore, perchè non può assumersi una curva *qualunque arbitraria* a direttrice comune del cono direttore e della rigata determinatrice.

119. Ma comunque nella espressione generale delle anulari di Sesta Classe, non possono punto ridursi a minor numero le sei quantità arbitrarie ch' essa comprende, pure potrebbe stare che in essa una delle quattro funzioni arbitrarie si riducesse ad essere invece una costante; onde in un tal caso delle sei quantità arbitrarie, tre sarebbero funzioni delle coordinate, e le altre tre no, ma costanti arbitrarie.

Difatti esista il cono direttore dell' anulare, di direttrice delle equazioni

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=f_1(x) \end{cases}$$

Potremo tagliare esso cono con un piano, e potrà questo essere parallelo, per esempio, al piano xy. È chiaro che potremmo assumere la curva del taglio a curva direttrice del cono medesimo. E se così avessimo fatto fin da principio, avremmo potuto assumere per equazioni della direttrice di esso cono le

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=a. \end{cases}$$

E quindi la $f(\beta)=f(\varphi(x,y,z))=\varphi_1$ sarebbe parimenti restata una funzione di x, y, z; ma non così la $f_1(\beta)=a$, che sarebbe restata uguale alla quantità a, costante bensì, ma arbitraria.

Potremmo dunque nella (CXIX) porre uguale zero le derivate di una delle φ_1, φ_2, od anche della φ. Ma ciò non faremo in

grazia di simmetria, e solo riterremo, potersi sempre che si voglia considerare come costante arbitraria una di esse funzioni.

II.

120. Le funzioni arbitrarie, che entrano nella espressione generale delle anulari di sesta classe dunque, ridotte al minimo, sono tre. E se la φ_2 sia una costante arbitraria, le tre funzioni arbitrarie ed indipendenti tra loro sarebbero le φ_1, φ_3, φ_4. E le altre tre quantità arbitrarie nella espressione medesima contenute sarebbero le φ_2, K e K_1, tutte tre costanti. Ma o che le φ_1, φ_2 sieno entrambe variabili, o l'una costante, esse dovranno sempre variare accoppiate; perocchè emergono (115) dalle f, f_1 coordinate accoppiate di un medesimo punto della direttrice del cono direttore individuato (3) per un valore particolare β della ascissa x: e parimenti accoppiate anderanno le costanti arbitrarie K, K_1, perocchè sono esse che individuano insieme le coordinate accoppiate y, z corrispondenti ad una medesima ascissa x qualunque, per modo che appartengono tutti i punti che pel variare della x vengono a considerarsi, ad una sola e medesima curva (107, 108).

Facendo dunque ragionamenti analoghi a quelli fatti al N. 51, potremo porre essere le anulari di sesta classe di tanti gruppi per quante diverse possono essere le forme accoppiate delle φ_1, φ_2; ed appartenere ad un medesimo gruppo tutte quelle per le quali esse funzioni ammettono una medesima coppia di forme: tutte quelle di un medesimo gruppo essere di tanti generi per quanti diversi possono essere i valori particolari accoppiati delle K, K_1; ed essere di un medesimo genere quelle per le quali K, K_1 hanno lo stesso valore accoppiato: quelle di un medesimo genere essere di tante specie per quante forme diverse possono assumersi ad arbitrio per la φ_3; ed essere della stessa specie quelle per le quali la φ_3 ritiene la stessa forma: ed infine essere di tante varietà diverse quelle di una medesima specie, per quante diverse sono le forme assegnate alla φ_4; ed essere di una medesima varietà quelle per le quali tutte la φ_4 ritiene la medesima forma.

E dalle seguenti indagini cercheremo investigare a quali geometrici fatti equivalga tale assunta algebrica classificazione.

ARTICOLO II.

Espressione della Caratteristica dell' Anulare generale di Sesta Classe.

I.

121. Al N. 24 del Capo Primo trovammo la espressione (XXX) di un individuato punto della caratteristica di un' anulare qualunque a cono direttore, il quale appartiene a quella sua circonferenza, ch' è individuata dall' ascissa $x=\beta$ del punto di contatto del suo piano colla curva direttrice del cono direttore; ed in una tale espressione è la distanza Δ. Ma per quello che abbiam detto al N.° 113, quando l' anulare è di sesta classe, la distanza Δ dipende dalle β ed α nel modo espresso dalla (CXVI). Dunque dalla (XXX) dedurremo la espressione di quel punto della caratteristica di un'anulare di sesta classe, il quale è sulla circonferenza individuata per l' ascissa β, ponendo in essa per Δ la sua espressione data dalla (CXVI).

Per le cose dette ai N. 115 e 47, è chiaro che dalla trasformata che si ottiene per la detta sostituzione per la Δ, otterremo la espressione della caratteristica tutta intera, alla quale l' individuato punto da essa trasformata espressa appartiene, ponendo per β, f, f_1, le funzioni φ, φ_1, φ_2 delle x, y, z; per le δ, α le φ_3, φ_4; per D la $\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$; e per R la ρ e per la S la Σ. Perocchè ciò equivale (115) a considerare non quell' individuato punto di essa caratteristica che trovasi sulla circonferenza individuata dal particolare valore della β, ma tutt' i punti di essa che sono su tutte le circonferenze dell' anulare niuna eccettuata, ossia i punti tutti della caratteristica.

Facciamo dunque difatto nelle (XXX) tutte cosiffatte sostitu-

zioni. È manifesto che la prima di esse dà la medesima (CXIX), e la seconda porge

$$\text{(CXX)}\quad \varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\left(x\varphi+y\varphi_1+z\varphi_2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)\varphi_4\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)=\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma$$

La terza diventa una relazione identica (117). Onde le CXIX) e (CXX) simultaneamente considerate esprimono la caratteristica dell'anulare generale di sesta classe; e della quale τ è il parametro di posizione (21).

La (CXIX) esprime l'anulare generale di sesta classe. La (CXX) esprime un'altra superficie, sulla quale pur giace la caratteristica; onde questa si ha dalla intersezione loro. Ma la (CXX) si compone colle τ, φ, φ_1, φ_2, e φ_4 senza contenere la φ_3, che è la funzione di specie dell'anulare (120). Dunque il

Teorema. *Le anulari tutte di sesta classe di qualunque specie sieno, purchè appartengano a famiglie di un medesimo stipite di varietà, e ad un medesimo genere di uno stesso gruppo, hanno le loro caratteristiche corrispondenti ad un medesimo parametro di posizione, allogate tutte in una sola e medesima superficie diversa dall'anulure alla quale appartengono.*

E questa proprietà è comune sì alle anulari di quinta (53) come a quelle di sesta classe.

II.

122. Se nella (CXX) facciamo $A.\text{tang}.\tau=0$, ottenghiamo nella risultante la espressione che insieme colla (CXIX) dà la caratteristica ch'è linea di contatto dell'anulare di sesta classe colla sua rigata determinatrice. E fatto $A.\text{tang}.\tau=0$, la (CXX) porge

$$\text{(CXXI)}\quad \varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'(x\varphi+y\varphi_1+z\varphi_2)=\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma$$

*

Espressione indipendente non solo dalla φ_3, ma ancora dalla φ_4. Quindi il

TEOREMA. *Tutte le anulari di sesta classe di un medesimo genere di uno stesso gruppo e di qualunque specie e varietà sieno* (120), *hanno tutte la curva di loro contatto colla rigata determinatrice allogata in una sola e medesima superficie diversa da ciascuna di esse.*

Proprietà questa comune alle anulari di quinta classe (54). Ma la superficie luogo delle caratteristiche non può essere la stessa per le anulari di quinta e per quelle di sesta classe, comunque fossero tali i determinanti loro, che per entrambe, le funzioni φ, φ_1, φ_2, fossero di egual forma. Perocchè onde questi due luoghi non fossero diversi dovrebb' essere

$$\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)=\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma$$

una equazione identica.

123. Facciamo ora *A*.tang.$\tau=1^q$, ed anche *A*.tang.$\tau=3^q$. Per ambi i casi sarà $\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$, che è il coseno di esso angolo, uguale a *zero*. Epperò la (CXX) in ambi i casi si cangia nella

(CXXII)

$$\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)''\left(x\varphi+y\varphi_1+z\varphi_2+2\varphi_4\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)=\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma$$

Dunque, come per le anulari di quinta classe (55), il

TEOREMA. *Nelle anulari di sesta classe le caratteristiche sue, la più lontana dal cono direttore, e la più vicina ad esso, sono insieme sopra una sola e medesima superficie diversa dall'anulare alla quale appartengono.*

Ed una tale superficie è espressa dalla (CXXII).

Ed anche qui si vede, che (come per le anulari di quinta classe) la (CXX), che appartiene a quelle di sesta, diventa libera dalla φ_4 per la sola caratteristica ch'è linea di contatto dell'anulare colla sua rigata determinatrice.

ARTICOLO III.

Espressione della Inviluppata Rigata all' anulare generale di Sesta Classe.

I.

124. Nel §. 3.° del Capo Primo trovammo che la (XLI) e la seconda delle (XL) sono insieme la espressione esplicita di una retta della inviluppata rigata all' anulare generale a cono direttore. Ed in essa è la distanza Δ. Ora secondo ciò che abbiamo veduto (113), per le anulari di sesta classe debbe questa distanza Δ essere espressa nel modo indicato dalla (CXVI). Dunque se nella (XLI) poniamo essa espressione della Δ, otterremo la espressione analitica di una retta individuata della inviluppata rigata, non più ad un' anulare qualunque a cono direttore, ma ad una di sesta classe. Facciamo una tal sostituzione; e prima (per meglio accomodarla a ciò che saremo per fare) in amb' i membri, moltiplichiamo, tanto la quantità funzionante da numeratore, quanto l' altra funzionante da denominatore per DR; e dopo la sostituzione per Δ, moltiplichiamo le quantità funzionanti da numeratore e denominatore nel solo primo membro per $(ff_1'-f'f_1)D$: e quindi generalizziamo le derivate, e poniamovi ancora $\tau=\frac{s}{c}$, chiamando s il seno, e c il coseno di A tang. τ. Otteghiamo, dopo tutto ciò

$$\frac{yD^2Rf^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'+fR\left[(1-c)\alpha f^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'D-\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)S\right]-(s\alpha+\delta)\left(\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'+f_1^3\left(\frac{f}{f_1}\right)'\right)f^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'D}{zD^2Rf^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'+f_1R\left[(1-c)\alpha f_1^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'D-\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)S\right]-(s\alpha+\delta)\left(\beta^3\left(\frac{f_1}{\beta}\right)'+f^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'\right)f^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'D}=$$

$$=\frac{\left[\left(\beta^3\left(\frac{f_1}{\beta}\right)'+f_1^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'\right)\left(\frac{f_1}{f}\right)'+\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)\left(\frac{\beta}{f}\right)'\right]sf^2-\left(\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'+f_1^3\left(\frac{f}{f_1}\right)'\right)cR}{\left[\left(\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'+f_1^3\left(\frac{f}{f_1}\right)'\right)\left(\frac{f}{f_1}\right)'+\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right]sf_1^2-\left(\beta^3\left(\frac{f_1}{\beta}\right)'+f^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'\right)cR}$$

E questa insieme colla

$$f^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'x+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'y+\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'z=0\,,$$

che è la stessa seconda delle (XL) generalizzatevi le derivate, esprimono una individuata retta della inviluppata di un' anulare qualunque di sesta classe.

Dedurremo da esse la espressione, non di una individuata retta della inviluppata, ma di essa tutta intera, eliminandone la β, che individua essa retta della inviluppata, lo che faremo (115) sostituendo nella prima delle due ultime espressioni, per $\beta, f, f_1, \delta, \alpha, D, R, S,$ rispettivamente $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}, \rho, \Sigma,$ delle quali (117) la φ dipende dalle φ_1, φ_2 per la relazione (LXI), e le ρ, Σ esprimono le cose dichiarate innanzi (48, 116).

Fatte le sostituzioni, ottenghiamo per espressione della inviluppata rigata all' anulare di sesta classe la

(CXXIII)

$$\frac{\varphi_1\rho\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma+\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\left\{(\varphi_3+s\varphi_4)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'\right)-\left((1-c)\varphi_1\varphi_4+y\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)\rho\right\}\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}}{\varphi_2\rho\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma+\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\left\{(\varphi_3+s\varphi_4)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)-\left((1-c)\varphi_2\varphi_4+z\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)\rho\right\}\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}}=$$

$$=\frac{\left\{\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right\}s\varphi_1^2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)c\rho}{\left\{\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'+\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right\}s\varphi_2^2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)c\rho}$$

II.

125. L'ultima trovata espressione è quella di una inviluppata qualunque dell'anulare di sesta classe; ed apparterrà ad una individuata di esse inviluppate, secondo il diverso valore (21) che assumerassi pel parametro di posizione τ, ossia secondo il valore dell'angolo di cui τ è la tangente.

Però otterremo la espressione della rigata determinatrice facendo nella (CXXIII) $A.\text{tang}.\tau = o$: perlocchè è $c = 1$ ed $s = o$.

Ciò fatto la (CXXIII) perde i termini moltiplicati per s; onde poi liberata dai fratti, riuniti in un termine quelli che moltiplicano Σ ed in un'altro quelli che moltiplicano $\sqrt{(\varphi^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2)}$, fatte le riduzioni e separati di nuovo i termini accoppiati, risulta:

(CXXIV)

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)y-\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma\rho\varphi_1\right]\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right) \\ -\left[\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)z-\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma\rho\varphi_2\right]\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right) \end{array}\right\}\cdot\rho = o$$

E questa è la espressione della rigata determinatrice dell'anulare generale di sesta classe. Espressione importante più che non è quella della determinatrice nelle anulari di quinta classe. Perciocchè per queste la rigata determinatrice può sempre assumersi ad arbitrio (41,118); laddove per quelle di sesta classe essa rigata non è mai arbitraria di natura, e può solo esserlo di posizione, e quindi anche d'intensità di curvatura. Di fatto abbiamo veduto (109, 111) che tanto la sua curva direttrice, che n'è ad un tempo lato di regresso, quanto la curva di sua intersezione o contatto col cono direttore dell'anulare, non possono essere di qualunque natura ma debbono essere delle equazioni (CXI) e (CXIII), e dipendere però dalle forme delle funzioni f, f_1 della β, già funzioni $\psi(x,y)$: ossia debbono dipendere dalle forme delle funzioni φ, φ_1, φ_2, di cui due sole sono arbitrarie (117), e riferisconsi alla natura del cono

direttore : ed è evidente che secondo il diverso valore delle arbitrarie K, K_1 che entrano nella S (CXVII) contenuta nelle equazioni (CXIII) della curva di contatto del cono colla rigata determinatrice, questa curva comunque non varii di natura, pure debbe variare nell' ampiezza ed intensità delle successive curvature sue; perocchè secondo la diversa posizione sua sul cono direttore variano le ampiezze degli archi omologhi. Così se siasene tracciata una serie sul cono direttore, tutte avranno un arco compreso tra due posizioni consecutive del lato del cono, e tutti questi archi omologhi si anderanno allungando a misura che si allontanano dal vertice del cono stesso; onde è che le corde sottese a due di essi archetti omologhi consecutivi comprendendo ugual angolo i raggi di curvatura anderanno crescendo in lunghezza per gli archi omologhi delle curve di che si tratta, a misura che si allontanano dal vertice del cono. Dunque se le curve di contatto di un medesimo cono direttore, con tutte le possibili determinatrici dell'anulare di sesta classe, non cangiano di natura, cangiano però d' intensità di curvatura pel variare dei valori particolari simultanei delle costanti arbitrarie K,K_1: e quindi anche d' intensità di curvatura debbono variare le aree omologhe delle rigate che hanno quelle diverse curve di contatto per direttrici.

Per le quali cose la (CXXIV) esprime quale debb' essere di natura la rigata determinatrice delle anulari tutte di sesta classe di un medesimo gruppo: e vedesi che la natura sua, come quella del suo lato di regresso e della linea di suo contatto col cono direttore, dipende solo da quella di questo medesimo cono; essendo essa espressione indipendente dalle φ_3, φ_4.

Intanto questa indipendenza ci conduce a conchiudere il

Teorema. *Tutte le anulari di sesta classe, purchè siano di un medesimo gruppo, di qualunque genere specie o varietà sieno, hanno tutte le rigate determinatrici di una sola e medesima natura; e quando sieno non solo di un medesimo gruppo, ma ancora di un medesimo genere, ammettono, tutte di qualunque specie o varietà sieno, una sola e medesima rigata determinatrice.*

E perciocchè tanto il cono direttore, quanto la rigata deter-

minatrice non dipendono punto nè da φ_3, nè da φ_4, ma solo dalle funzioni φ, φ_1, φ_2 e dalle costanti K, K_1, ne conseguita che date esse superficie, il gruppo ed il genere cui appartiene l' anulare restan determinati; ma non mai la specie e la varietà, le quali, come abbiam veduto (120) dipendono rispettivamente dalle forme delle funzioni φ_3, φ_4.

Intanto se paragoneremo la (LXVII) coll'ultima trovata (CXXIV), che sono rispettivamente le espressioni della rigata determinatrice di un' anulare generale di quinta classe e di una di sesta classe, ci avvedremo ch' esse espressioni differiscono in questo massimamente; cioè che nella prima, la y, e la z, visibili moltiplicano l' unità, laddove nella seconda moltiplicano la quantità $\varphi_{1,2}\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)$, e parimenti le φ_1, φ_2 che nella prima sono semplicemente sottratte dalla y, z, nella seconda sono prima moltiplicate per $\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma\rho$; e vedesi inoltre che entrambe hanno il fattore ρ. Onde le condizioni comprese (99) nella relazione $\rho=0$, competono in generale sì alle determinatrici delle anulari di quinta classe che a quelle di sesta. Ed è da osservare inoltre che la espressione (CXXIV) contenendo la Σ che non è contenuta nella (LXVII) evvi quest' altra essenzialissima differenza tra la composizione di esse medesime espressioni: cioè che quella della determinatrice delle anulari di quinta classe si compone con due sole quantità arbitrarie, che sono le φ_1, φ_2, e quella della determinatrice delle anulari di sesta classe, si compone invece con quattro arbitrarie, che sono le φ_1, φ_2, e le K, K_1.

126. Sia ora $A.\text{tang.}\,\tau=2q$. Sarà $s=0$, $c=-1$. E dati questi valori particolari alle s e c della espressione (CXXIII) ne otterremo quella della inviluppata rigata particolare, le di cui generatrici sono parallele a quelle della determinatrice. Fatta la sostituzione, liberata da' fratti la equazione, riuniti i termini che moltiplicano $\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$, e fatte le riduzioni, risulta

(CXXV)

$$\left.\begin{array}{l} \Big\{ y\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^1)-\varphi_1\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma\Big\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right) \\ -\Big\{ z\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)-\varphi_2\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma\Big\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right) \end{array}\right\}.\rho=$$

$$\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\rho.2\varphi_1\Big\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\varphi_2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\varphi_1\Big\}$$

Espressione indipendente da φ_3, come quella della determinatrice (125), ma non dalla φ_4. Onde è che se la determinatrice può essere della stessa natura per tutte le anulari di una medesima tribù, di qualunque genere specie o varietà sieno, la inviluppata ad elementi paralleli ai suoi, sarà della stessa natura per tutte le specie diverse di un medesimo gruppo, ma non per le diverse varietà.

E non è difficile conchiudere, che cosiffatte proprietà competono a queste due inviluppate soltanto; mentre che per ogni altra inviluppata, cioè per tutti gli altri valori competenti alle s, c, la (CXXIII) non mai perde le funzioni φ_3, φ_4: e non potrebbe diversamente accadere; perciocchè egli è l' inviluppata che genera l' inviluppo, e se questo cangia di specie e varietà, debbono in generale, pel variare di queste, variare di natura esse inviluppate; e solo la determinatrice non varia di natura, per avere la singolare proprietà (122) di toccare secondo una sola e medesima linea le anulari tutte di sesta classe di un medesimo gruppo e genere, di qualunque specie e varietà sieno; e l'altra ad elementi paralleli a quelli della inviluppata non varia di natura pel cangiare di varietà dell' inviluppo, perchè ha la singolare proprietà di toccare secondo una sola e medesima linea le anulari tutte di sesta classe di una medesima varietà.

E quì sarà facile fare osservazioni analoghe a quelle del N.° precedente in quanto alla composizione rispettiva delle (LXVIII), (CXXV); ed anche fare osservazioni analoghe a quelle del N.° 58 in ordine alla composizione rispettiva delle (CXXIV), (CXXV).

ARTICOLO IV.

Espressione della Rigata a Generatrici Normali ciascuna a ciascuna di quelle della inviluppata all' anulare generale di Sesta Classe.

I.

127. Per determinare questa espressione, ricorriamo ad una qualunque delle (XLIV), che sono (36) quelle di una individuata retta della rigata a generatrici normali a quelle della inviluppata di un'anulare qualunque di quelle a cono direttore; ed accomodiamola a rappresentare esclusivamente una individuata retta della rigata a generatrici normali a quelle della inviluppata ad un' anulare di sesta classe; la qual cosa possiamo speditamente fare ponendovi per Δ il suo valore (CXVI), che è quello che gli compete (113), quando trattasi di anulari di sesta classe.

Fatta la sostituzione, otterrebbesi la espressione di una individuata retta della rigata di che si tratta per le anulari di sesta classe; ed abbracceremo tutte le rette di essa rigata, ovvero avremo essa medesima rigata rappresentata, quando ne avremo eliminata la β in conformità del detto al N.° 115. Quando vi porremo cioè per β la $\varphi(x, y, z)$, e ad un tempo terremo conto di ciò (47) che quando $\beta=\varphi(x, y, z)$, è ancora $f(\beta)=\varphi_1(x,y,z)$, $f_1(\beta)=\varphi_2(x,y,z)$.

Dunque nella seconda delle equazioni (XLIV) sostituiamo in primo per Δ il suo valore (CXVI), quindi moltiplichiamone le quantità funzionanti da numeratore e denominatore nel primo membro per $D^2R(ff_1'-f'f_1)$; in terzo luogo generalizziamo le derivate; ed infine per $\beta, f, f_1, R, S, \delta, \alpha$ poniamovi al solito $\varphi, \phi_1, \varphi_2, \rho, \Sigma, \varphi_3, \varphi_4$, e per D il radicale $\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$. Ottenghiamo, dopo tutte cosiffatte operazioni,

(CXXVI)

$$\frac{\varphi_1\rho\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma+\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\left\{\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)-\left(y\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}+\varphi_1\varphi_4\right)\rho\right\}\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}}{\varphi_2\rho\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma+\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\left\{\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)-\left(z\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}+\varphi_2\varphi_4\right)\rho\right\}\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}}$$

$$=\frac{c\varphi_1\rho+s\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)}{c\varphi_2\rho+s\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)}$$

E questa è la espressione della rigata a generatrici normali ciascuna a ciascuna di quelle della inviluppata; e nella quale le diverse lettere v' hanno ciascuna il significato dichiarato innanzi; ed s e c stanno pel seno e pel coseno dell' arco la di cui tangente è τ, essendo τ il parametro (21) che individua la rigata espressa.

II.

128. Vogliasi ora quella di tali rigate, la distanza di tutti i punti della quale, da ciascuna retta del cono direttore, secondo la quale questo è toccato dal piano della circonferenza generatrice che passa per ciascuno di que' punti, sia δ, ossia φ_3.

Ciò otterremo facendo $A.\text{tang}.\tau=$ zero; perocchè in un tal caso la rigata di che si tratta è ad elementi paralleli a quelli del cono direttore.

Facciamo dunque nella (CXXVI) $s=0$, e $c=1$. Ottenghiamo, dopo liberata la eguaglianza dai fratti e dopo le riduzioni, per espressione della rigata ad elementi normali a quelli della inviluppata che è rigata determinatrice, la

(CXXVII)

$$(y\varphi_2-z\varphi_1)\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=\varphi_3\left\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\varphi_2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\varphi_1\right\}$$

espressione indipendente da φ_4, ed anche dalla Σ. Dunque il

Teorema. *Tutte le anulari di sesta classe di un medesimo gruppo, e qualunque ne sia la inviluppata determinatrice, hanno tutt' i centri delle loro circonferenze generatrici allogati sopra*

una sola e medesima rigata ad elementi paralleli a quelli del loro comune cono direttore.

E poichè, onde una tal superficie resti determinata è necessario siano determinate le forme delle funzioni tutte ch' entrano nella sua composizione, e perciò la φ_3, ne segue che data di natura questa rigata, resta determinato non solo il gruppo dell'anulare di sesta classe, ma eziandio ne resta determinata la specie, e non però la varietà.

129. È veramente importante il far paragone tra la (CXXVII) rappresentante la rigata ad elementi paralleli a quelli del cono direttore dell' anulare generale di sesta classe, e la (LXX) che rappresenta (61) la rigata ad elementi paralleli a quelli del cono direttore dell' anulare generale di quinta classe.

È evidente che queste due espressioni generalissime si compongono in un modo del tutto identico colle funzioni φ, φ_1, φ_2 e φ_3, le quali in entrambe rappresentano le prime tre la natura del cono direttore, e la quarta la legge del variare delle distanze del centro di ciascuna circonferenza dell' anulare da quel lato del cono suo direttore che giace sul piano di essa. Dunque se per la data genesi di due anulari l' una di quinta classe, e l' altra di sesta classe, quest' ultima legge è la stessa per entrambe; ed entrambe abbiano il cono direttore di egual natura, entrambe avranno la rigata di che si tratta pure di egual natura. Dunque il

Teorema. *Se intorno ad un medesimo cono direttore stieno quante anulari diverse di Quinta e Sesta Classe si vogliano, ed anche comunque diverse di genere o di varietà, purchè tutte appartengano a famiglie di specie tutte di un solo e medesimo stipite, avranno esse anulari allogati i centri di tutte le circonferenze generatrici loro, su di una sola e medesima rigata ad elementi paralleli a quelli del comune loro cono direttore; e la quale è normale ad un tempo alle diverse inviluppate rigate determinatrici di tutte esse.*

130. Che se nella (CXXVI) facciamo $A.\tan.\tau = 1^q$, la rigata a generatrici normali a quelli della inviluppata di un'anulare di sesta classe, avrà ad un tempo tutte le sue generatrici normali cia-

scuna a ciascuna di quelle del cono direttore, e parallele a quelle della rigata determinatrice. Però sarà essa il luogo dei punti distanti da ciascuna retta della determinatrice che è sul piano che passa per ciascuno di quelli punti per α, ossia per φ_4.

Per ottenere la espressione di una tale rigata, facciamo $s=1$, e $c=0$ nella (CXXVI). Fatta la sostituzione, e dopo liberata da' fratti la equazione, riuniti i termini che moltiplicano $\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$, e fatte le riduzioni, risulta

(CXXVIII)

$$\left\{\begin{array}{l} \left[y\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)-\varphi_1\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma\right]\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right) \\ -\left[z\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)-\varphi_2\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma\right]\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right) \end{array}\right\}\cdot\rho$$

$$=\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\rho\cdot\varphi_4\left[\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\varphi_2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\varphi_1\right]$$

Espressione questa indipendente dalla φ_3, come la precedente è dalla φ_4. Dunque il

Teorema. *Tutte le anulari di Sesta Classe di un medesimo gruppo e genere, e di qualunque specie; purchè appartengano ad una medesima varietà, hanno i centri delle loro circonferenze generatrici allogati in una sola e medesima rigata ad elementi paralleli a quelli della determinatrice.*

E poichè determinata la forma della φ_4 assumemmo (120) essere determinata la varietà dell' anulare, ne consegue che determinata la rigata rappresentata dalla (CXXVIII) resta determinata la varietà dell'anulare: e nello stesso modo che determinata la (CXXVII) resta determinata la specie.

Intanto abbiam fin quì ottenute le espressioni di tre rigate ad elementi paralleli tra loro, e normali a quelli del cono direttore di un' anulare generale di sesta classe: e sono quella della inviluppata determinatrice (125), l' altra della inviluppata in sublime (126) e la terza (che è quella che in questo numero consideriamo) la quale passa per la curva dei centri ed è però come equidistante dalle

altre. Or possiamo osservare, come per le anulari di quinta classe (63), che le forme delle (CXXIV), (CXXV), (CXXVIII), analogamente differiscono tra loro, pel modo come v' è contenuta la φ_4. Nella (CXXIV) manca la φ_4, e con essa il secondo membro; nella (CXXVIII) nel secondo membro è φ_4 ripetuta una volta; e nella (CXXV) nel secondo membro la φ_4 v' è ripetuta due volte. Il primo membro della (CXXV), e quello della (CXXVIII) divisi ciascuno rispettivamente per tutto ciò che moltiplica $2\varphi_4$ nella prima, e φ_4 nella seconda, esprime in sostanza la distanza che serbano tra loro le rette, su di uno stesso piano, delle tre superficie rigate di che si tratta, dalla determinatrice dell' anulare: ed è chiaro che per la prima è *zero* una tal distanza, per la seconda è $2\varphi_4$, per la terza è φ_4.

È inutile poi l' osservare, che l' ultima trovata espressione (CXXVIII) differisce dall' analoga (LXXI) relativa alle anulari di quinta classe, come abbiam fatto osservare (126) differire tra loro le (CXXV), (LXVIII).

III.

131. Dopo il fin quì detto in ordine a certe inviluppate particolari, delle anulari di sesta classe, ed a certe particolari rigate a generatrici normali ciascuna a ciascuna di quelle delle inviluppate; è facile il dedurne la classificazione geometrica delle anulari di sesta classe, equivalente a quella fattane algebrica al N.° 120.

Poichè abbiamo dimostrato che date le forme delle funzioni φ_1, φ_2, ne viene determinata quella della φ (117), e che date le φ, φ_1, φ_2 resta determinato il cono direttore, nè alcun' altra delle rigate contemplate innanzi, conchiuderemo

1.° Che le anulari di sesta classe sono di tanti gruppi, per quanto diverso di natura può essere un cono comunque immaginabile nello spazio: e che sono di un medesimo gruppo tutte quelle che ammettono coni direttori di ugual natura.

Poichè abbiam dimostrato (125), che date non solo le forme delle funzioni φ, φ_1, φ_2, ma ancora la Σ, ossia le K, K_1 resta de-

terminata la rigata determinatrice dell' anulare di sesta classe, e con essa la curva di suo contatto col cono direttore; ed abbiamo osservato che per queste sole arbitrarie note, non però restano determinate le altre contemplate rigate, conchiuderemo per le cose tutte dette al N.° 125

2.° Che le anulari di sesta classe di un medesimo gruppo sono di tanti generi diversi, per quanto possono variare d' intensità le successive curvature di certe linee tracciabili sul cono direttore, e di natura strettamente dipendenti dalla natura di questo: e che sono di un medesimo genere tutte quelle che hanno una di tali linee per linea di contatto della rigata determinatrice col cono direttore.

Poichè abbiam veduto che quando, oltre all' esser date le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, sia data anche la forma della φ_3, la natura della rigata ad elementi paralleli a quelli del cono direttore e normali a quelli della determinatrice è determinata di natura; ed è chiaro d' altronde che quando è determinata quest' ultima pur di natura, resta determinata la intersezione di esse due superficie; onde poi viceversa data questa curva sulla determinatrice, e la determinatrice stessa restano pur determinate non solo le φ, φ_1, φ_2, K, K_1, ma inoltre anche la φ_3, talchè essa curva può variare ad arbitrio a causa del variare arbitrario della φ_3. Conchiuderemo

3.° Che le anulari di un medesimo gruppo e di un medesimo genere possono essere di tante specie per quante di natura diversa possono essere le curve tracciabili con legge di continuità sulla rigata determinatrice corrispondente a ciascun individuato genere di un' individuato gruppo: e che sono di una medesima specie tutte quelle che toccano la rispettiva rigata determinatrice secondo curva di ugual natura.

E poichè infine se la rigata della espressione (CXXVIII) è determinata, non solo debbon essere determinate, come il sono per le precedenti rigate, le φ, φ_1, φ_2, K, K_1 ma debb' essere determinata ancora la φ_4; e poichè data questa e la precedente rigata, resta determinata la curva di loro intersezione, la quale, come è noto per le cose dette innanzi, è la curva dei centri di tutte le circonferenze generatrici dell' anulare; onde poi viceversa data essa curva

d' intersezione resta determinata essa medesima φ_4 ; conchiuderemo

4.° Che le anulari di una medesima specie possono essere di tante varietà , per quante di natura diverse possono essere le curve tracciabili su di una superficie rigata , ad elementi paralleli al cono di gruppo ed avente come curva direttrice quella di specie : e che sono di una medesima varietà quelle anulari di una medesima specie che hanno curva dei centri di ugual natura.

IV.

132. Se si volesse la espressione analitica della curva dei centri dell' anulare generale di sesta classe , basterebbe ad ottenerla dare alle s, c della espressione (CXXVI), della rigata a generatrici normali ciascuna a ciascuna di quelle della inviluppata , due valori simultanei diversi , ad esse s e c competenti ; ed assumere come simultanee le due trasformate risultanti ; perciocchè le rigate tutte a generatrici normali alle inviluppate di una medesima anulare generale passano tutte per la curva dei centri di essa. Però essendo la (CXXVII) e la (CXXVIII) le espressioni di più semplici forme emergenti dalla (CXXVI), riterremo esse due , considerate simultaneamente, ad espressione della curva dei centri delle circonferenze dell' anulare generale di sesta classe : e sarà per esse che potremo sempre determinare la curva di varietà di una individuata anulare di sesta classe.

ARTICOLO V.

Dati i Determinanti dell'Anulare Particolare di sesta classe, determinarne la equazione: e determinarne quelle della sua caratteristica, della sua inviluppata e della rigata a generatrici a quelle di questa normale.

I.

133. Sono *determinanti geometrici in generale* dell'anulare di sesta classe il suo cono direttore, la sua rigata determinatrice, e le leggi del variare delle distanze del centro della circonferenza mobile che genera la superficie, dal lato del cono e dalla retta della determinatrice, che sono sul piano di essa circonferenza in ogni sua posizione.

Ma come emerge dal precedentemente detto (109, 118, 125), di cotesti determinanti, il cono direttore, e le leggi del variare delle dette due distanze sono arbitrarii, e possono assumersi ad arbitrio; ma non la rigata determinatrice, la quale può assumersi di arbitraria posizione bensì, ma non di arbitraria natura.

Trattasi dunque di determinare le funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, e le costanti K, K_1 dati che siano, od esplicitamente, od implicitamente il cono direttore, un suo punto pel quale debba passare la linea di suo contatto colla rigata determinatrice, e le leggi del variare delle distanze del centro della circonferenza mobile che genera la superficie dalla retta del cono e dalla retta della determinatrice, che sono sul piano di essa circonferenza in ogni sua posizione.

II.

134. Sian dunque in primo esplicitamente date quest' ultime leggi ed il cono direttore, ed il punto di questo per ove debbe passare la rigata determinatrice.

E sia

$$\mathfrak{L}_1(x, y, z)=0$$

la equazione del cono direttore. Potremo convenientemente assumere un' altra superficie qualunque che tagli esso cono, per modo che ne incontri tutte le rette. E sia in secondo luogo la equazione di questa superficie arbitraria (che potrebbe anch' essere un piano) la

$$\mathfrak{L}_2(x, y, z)=0.$$

Pel modo come questa seconda superficie è scelta, s' intersecherà col cono direttore, secondo una curva. Ne siano β, γ, ε le coordinate. Essa curva d' intersezione sarà data dalle equazioni

(CXXIX)
$$\begin{array}{l}\mathfrak{L}_1(\beta, \gamma, \varepsilon)=0\\ \mathfrak{L}_2(\beta, \gamma, \varepsilon)=0\end{array}$$

e possiamo qoesta riguardare come curva direttrice del cono direttore.

Pertanto colle precedenti due equazioni esistono le loro derivate rispetto a β,

(CXXX)
$$\begin{cases}\mathfrak{L}_1'(\gamma)\gamma'+\mathfrak{L}_1'(\varepsilon)\varepsilon'=0\\ \mathfrak{L}'_2(\gamma)\gamma'+\mathfrak{L}_2'(\varepsilon)\varepsilon'=0\end{cases}$$

e colle quattro precedenti l'altra

(CXXXI)
$$(\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)x+(\varepsilon-\beta\varepsilon')y-(\gamma-\beta\gamma')z=0$$

che è quella del piano tangente alla curva delle equazioni (CXXIX) nel punto delle coordinate β, γ, ε.

Per mezzo delle cinque precedenti equazioni potremo determinare in primo i valori di γ' ed ε' in funzione delle loro primitive e della β; e quindi ordinatamente i valori di β, γ, ε, tutte tre in funzione delle coordinate x, y, z: ed anche in funzione di queste medesime coordinate le γ', ε'. Gli ottenuti valori di β, γ, ε, saranno le richieste funzioni φ, φ_1, φ_2: e gli ottenuti valori di γ', ε' in x, y, z, saranno le derivate di φ_1, φ_2. E potrà calcolarsi ancora ove occorra la derivata di φ.

*

135. Siano ora a e b le ascisse di quel punto del cono direttore, pel quale si voglia passi la linea di contatto della rigata determinatrice con esso cono.

Le tre coordinate di un tal punto saranno date dalle

$$x=a$$
$$y=b$$
$$\mathcal{L}_1(a, b, z)=0.$$

Si risolvano le (CXXIX) rispetto a γ ed ε. E risulti

$$\gamma=f(\beta)$$
$$\varepsilon=f_1(\beta)$$

Per β si ponga la x; si calcolino le derivate $f'(x)$, $f_1'(x)$; e queste derivate e le funzioni effettive f, f_1 della x si pongano nelle (CXIII).

Dalla $\mathcal{L}_1(a, b, z)=0$ si cavi il valore di z, che per brevità chiamiamo c. E nelle (CXIII), dopo le dette sostituzioni, si ponga per x la a, per y la b, e per z la c. Da queste due equazioni così trasformate, si determineranno le costanti arbitrarie (109) le quali sono nascoste nella $S(a)$ (111) K, K_1, che risulteranno date dalle quantità costanti a, b, c, e dalle altre che sono i parametri del cono direttore, e che sono comprese nelle (CXXIX).

136. In ultimo date le leggi del variare delle distanze del centro della circonferenza mobile che genera l' anulare dal lato del cono e dalla retta della determinatrice, che sono sul piano di essa circonferenza in ogni sua posizione, sarà data una relazione tra la prima di esse distanze, che abbiamo chiamata δ e le coordinate x, y, z; ed un' altra tra la seconda delle distanze stesse, la quale abbiamo detta α ed esse medesime coordinate. Siano

$$\mathcal{L}_3(\delta, x, y, z)=0$$
$$\mathcal{L}_4(\alpha, x, y, z)=0$$

esse relazioni. Risolute queste rispetto a δ ed α, otterrassi la δ in funzione di x, y, z, e questa sarà la φ_3; ed anche la α in funzione di x, y, z, e questa sarà la φ_1.

III.

137. Se invece i determinanti della superficie non siano esplicitamente dati, ecco come procederassi.

Siano β, γ, ε le coordinate della curva direttrice del cono direttore; e siano

$$\text{(CXXXII)} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_1(\beta, \gamma, \varepsilon) = 0 \\ \mathcal{L}_2(\beta, \gamma, \varepsilon) = 0 \end{cases}$$

le equazioni di essa curva riferita a tre assi ortogonali la di cui origine è nel dato punto vertice del cono. Su queste due equazioni si opererà come sulle due (CXXIX) del caso precedente, e da esse colle altre tre seguenti (CXXX), (CXXXI) parimenti se ne determineranno le funzioni φ, φ_1, φ_2.

138. Siano p, q, r le coordinate della curva luogo dei centri della circonferenza mobile, riferite al medesimo sistema di assi coordinati; e siano

$$\text{(CXXXIII)} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_3(p, q, r) = 0 \\ \mathcal{L}_4(p, q, r) = 0 \end{cases}$$

le equazioni di essa curva. Ritenendo sempre le due (CXXXII) per equazioni della curva direttrice del cono direttore; per le cose dette al numero 9, ed anche al numero 110, sarà

$$\text{(CXXXIV)} \qquad \begin{cases} \delta = \sqrt{\left(p^2+q^2+r^2-\dfrac{(\beta p+\gamma q+\varepsilon r)^2}{\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2}\right)} \\[2ex] \alpha = \left(\dfrac{\omega}{\varepsilon} - \dfrac{\beta p+\gamma q+\varepsilon r}{\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2}\right)\sqrt{(\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2)}, \end{cases}$$

ove ω stà (110) per

$$\omega = \frac{\varepsilon\big((\gamma-\beta\gamma')\gamma+(\varepsilon-\beta\varepsilon')\varepsilon'\big)S(\beta)}{(\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2)(\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)},$$

nella quale ultima espressione S esprime (111) il binomio

$$\frac{(\gamma-\beta\gamma')\beta+(\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)\varepsilon}{(\gamma-\beta\gamma')\gamma+(\varepsilon-\beta\varepsilon')\varepsilon}\left(K_1-\int\frac{(\varepsilon-\beta\varepsilon')\beta-(\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)\gamma}{(\gamma-\beta\gamma')\gamma+(\varepsilon-\beta\varepsilon')\varepsilon}\right)-$$

$$-\frac{(\varepsilon-\beta\varepsilon')\beta-(\gamma\varepsilon'-\varepsilon\gamma')\gamma}{(\gamma-\beta\gamma')\gamma+(\varepsilon-\beta\varepsilon')\varepsilon}\left(K-\int\frac{(\gamma-\beta\gamma')\beta+(\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)\varepsilon}{(\gamma-\beta\gamma')\gamma+(\varepsilon-\beta\varepsilon')\varepsilon}\right)$$

Per le cose dette al N.° 11, colle precedenti equazioni esiste l' altra

$$\text{(CXXXV)} \qquad (\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)p+(\varepsilon-\beta\varepsilon')q-(\gamma-\beta\gamma')r=0$$

la quale esprime che ciascun punto della curva dei centri, di equazioni (CXXXIII), sono sul medesimo piano tangente sulla curva di equazioni (CXXXII).

Ed abbiamo colle relazioni (CXXXII), (CXXXIII), (CXXXIV), e (CXXXV), le altre (CXXX), (CXXXI) scritte al N.° 134. Da queste ultime e dalle (CXXXII) caveremo β, γ, ε, γ', ε' in funzione di x, y, z, come nel citato numero è detto. Sostituiti questi valori di β, γ, ε, γ', ε', (che si saranno così ottenuti) nella (CXXXV), e risoluta questa simultaneamente colle (CXXXIII) rispetto a p,q,r, otterremo queste tre quantità in funzione di x, y, z. Onde poi sostituiti cotesti valori che si saranno ottenuti per p, q, r nelle precedenti espressioni (CXXXIV) di δ ed α; e sostituitivi ancora gli ottenuti valori per $\beta, \gamma, \varepsilon$, risulteranno esse δ, α espresse in funzione di x, y, z. E la funzione ottenuta per δ sarà la chiesta φ_3; e l'altra ottenuta per α sarà la φ_4.

139. Per determinare in fine le costanti K, K_1 siano a, b, c le coordinate di un punto per lo quale si voglia passi la rigata determinatrice: siano cioè a, b, c le coordinate di posizione della rigata determinatrice.

Nella (CXXIV), che è la espressione della rigata determinatrice (125), per φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 si sostituiscano le determinate funzioni che esse sono delle x, y, z; e dalla equazione risultante, e dall' altra di un piano tangente al cono direttore che passa pel dato punto delle coordinate a, b, c, si determinino le equazioni della retta della rigata che passa per esso medesimo punto. Queste equazioni conterranno oltre alle a, b, c ancora le x, y, z e le K, K_1: ed è

noto che poste in esse equazioni invece di x, y, z le a, b, c debbono esse verificarsi. Vi si pongano dunque di fatto invece di x, y, z le a, b, c, e si risolvano quindi rispetto a K, K_1. I valori che se ne otterranno per queste, saranno i valori particolari delle costanti arbitrarie K, K_1, corrispondenti al dato determinante di posizione della rigata di genere dell' anulare, ossia corrispondenti all' assunta posizione della sua rigata sviluppabile determinatrice.

Ecco dunque, come dati implicitamente i determinanti di un'anulare particolare di sesta classe, possono determinarsi le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$; ed eziandio le costanti arbitrarie K, K_1.

IV.

140. E pertanto determinate nel modo espresso nei numeri precedenti le forme particolari delle funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, ed i valori particolari delle costanti K, K_1; dati che sieno, od esplicitamente, od implicitamente i determinanti arbitrarii di un' anulare particolare di sesta classe; cioè il suo cono direttore, la posizione della sua rigata determinatrice, e le leggi del variare delle distanze del centro della circonferenza mobile che genera la superficie dal lato di esso cono e dalla retta della determinatrice, le quali sono sul piano di essa circonferenza in ogni sua posizione, si determinerà la equazione di essa anulare particolare sostituendo le determinate forme delle dette funzioni nella espressione (CXIX), ed anche sostituendovi i particolari determinati valori delle K, K_1. E parimenti, facendo analoghe sostituzioni nelle (CXIX) e (CXX), (CXXIII), (CXXVI), si otterranno rispettivamente le equazioni della caratteristica di essa medesima anulare particolare, della sua inviluppata, e della rigata a questa normale. Ed otterrannosi parimenti le equazioni di tutte le altre linee o superficie, delle quali nei quattro paragrafi precedenti si sono determinate le generalissime espressioni analitiche.

ARTICOLO VI.

Applicazione delle cose esposte negli Articoli precedenti.

I.

141. Or vogliamo illustrare con un esempio le cose dette specialmente nell' Articolo precedente: vogliamo determinare cioè le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, ed anche le costanti K, K_1, corrispondenti ad una anulare particolare di sesta classe; onde poi sarebbe facile e spedito dedurne la equazione di essa anulare; ed anche quelle della sua caratteristica, della sua inviluppata rigata, e dell' altra rigata a generatrici normali ciascuna a ciascuna di quelle della inviluppata. Ed abbiamo detto « con un esempio » perciò che dopo tutte le cose esposte all' Articolo 6 del Capo precedente, non ci sembra indispensabile addurre anche quì parecchi esempli di applicazioni.

Occupiamoci dunque dell' anulare particolare di sesta classe avente a cono direttore un cono retto a base circolare; e di cui la linea di contatto della sua rigata determinatrice col cono direttore passi per un determinato punto della base di questo; ed i centri della circonferenza mobile, generatrice dell'anulare, stiano tutti su di una stessa retta menata pel vertice del cono.

Assumiamo ad origine delle coordinate il vertice del cono direttore e l' asse di questo ad asse delle z. Chiamiamo b il raggio della base del cono, a l' altezza del cono, m, n le tangenti trigonometriche che le projezioni della retta dei centri delle circonferenze dell' anulare sui due piani coordinati che passano per l'asse del cono fanno coll' asse stesso. Ed il punto della base del cono per lo quale debbe passare la curva di suo contatto colla rigata determinatrice, stia sull' asse coordinato delle y.

142. Per determinare le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ corrispondenti all'anulare particolare di che si tratta, bisognerà ricorrere al metodo del N.° 137. Epperò dobbiamo colle equazioni

$$\begin{cases} \varepsilon+a=0 \\ \beta^2+\gamma^2-b^2=0 \end{cases}$$

della base del cono direttore, ossia della sua curva direttrice, che tengon luogo delle (CXXXII) trattare le altre

$$\varepsilon'=0$$
$$\beta+\gamma\gamma'=0$$

derivate delle precedenti; ed anche la

$$a\beta x\pm ay\sqrt{(b^2-\beta^2)}+b^2z=0$$

trasformata della (CXXXI), quando per le γ, ε, γ', ε', che questa comprende, vi siano stati sostituiti i loro valori cavati dalle quattro precedenti equazioni, che sono quelle della base del cono direttore e le derivate di esse.

Queste cinque equazioni essendo identiche alle cinque analoghe del N. 73, è chiaro che daranno le funzioni φ, φ_1, φ_2 determinate come appresso:

$$\varphi=\frac{-b}{a(x^2+y^2)}\left(bxz-y\sqrt{a^2x^2+a^2y^2-b^2z^2}\right)$$
$$\varphi_1=\frac{b}{a(x^2+y^2)}\sqrt{a^2(x^2+y^2)-\left(bxz-y\sqrt{a^2x^2+a^2y^2-b^2z^2}\right)^2}$$
$$\varphi_2=-a$$

143. Essendo quì dato un punto della curva di contatto della rigata determinatrice col cono direttore, dovremo far uso del metodo indicato al N. 135 per la determinazione dei valori particolari delle costanti K, K_1. E pertanto le coordinate del punto dato di essa curva di contatto, sono (141) le

$$x=0\,,\quad y=b\,,\quad z=-a.$$

Risolviamo ora le

$$\varepsilon+a=0$$
$$\beta^2+\gamma^2-b^2=0$$

rispetto a γ ed ε; ottenghiamo

$$\gamma=\sqrt{(b^2-\beta^2)}\,,\quad \varepsilon=-a\,,$$

e postovi per β la x, e quindi calcolatene le derivate, ottenghiamo per li valori delle $f(x), f_1(x), f'(x), f_1'(x)$ contenute nelle (CXIII)

(CXXXVI)

$$f(x) = \sqrt{(b^2 - x^2)},\quad f_1(x) = -a,\quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{(b^2 - x^2)}},\quad f_1'(x) = 0.$$

Sostituiamo questi valori particolari delle f, f_1, e delle loro derivate f', f_1' nella (CXIII): e cominciamo perciò a calcolare il binomio (CXIV) indicato con $S(x)$ nella (CXIII); e per procedere speditamente e con ordine, cominciamo a fare $f_1'(x)$ uguale a *zero* nei suoi fattori fuori le parentesi, li quali sono il primo la quantità stessa messa sotto il secondo integrale ed il secondo la stessa quantità posta sotto il primo integrale. Fatto $f_1'(x) = 0$, essi fattori diventano rispettivamente

$$\frac{(f(x) - xf'(x))x - f_1(x)^2 f'(x)}{(f(x) - xf'(x))f(x) + f_1(x)^2},\quad \frac{(x + f(x)f'(x))f_1(x)}{(f(x) - xf'(x))f(x) + f_1(x)^2}$$

e posto in questi per f, f_1, f' i valori di sopra; il primo fattore, dopo tutte le riduzioni, diventerà

$$\frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$ ed il secondo diventerà *zero.*

Onde poi risulta senza uopo d' integrazioni

$$S(x) = \frac{K_1 x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

Calcolato il binomio (CXIV), ossia la $S(x)$, facciamo nelle (CXIII) prima $f_1'(x) = 0$, e quindi sostituiamovi per f, f_1, f', ed anche per S, i valori rispettivi scritti qui sopra. Ottenghiamo, dopo le riduzioni, le due equazioni semplicissime

$$\text{(CXXXVII)}\qquad \begin{cases} y = -\dfrac{K_1}{a}\sqrt{(b^2 - x^2)} \\ z = K_1 \end{cases}$$

le quali delle due costanti arbitrarie K, K_1 non comprendono che la seconda soltanto. Onde là sola K_1 possiamo determinare. Nè occorre

determinare che questa soltanto; imperciocchè le costanti arbitrarie K, K_1, entrando nella espressione (CXIX) dell'anulare, ed in quelle della sua caratteristica, della sua inviluppata, e della rigata a questa normale, solo perchè contenute nella Σ dipendente dalla S(116); nel presente esempio ove la S non contiene che la K_1 soltanto (per andare a *zero* il secondo termine del binomio S, che contiene K) la sola costante arbitraria K_1 è da determinarsi.

Per determinarla, poniamo nella prima delle equazioni precedenti, $x=0$, $y=b$, risulta immediatamente

$$K_1=-a.$$

E questo è il determinato valore particolare della K_1, competente all'anulare particolare di che si tratta.

144. Per determinare in ultimo le forme particolari delle funzioni φ_3, φ_4, corrispondenti all'anulare particolare di che si tratta, ricorriamo al metodo esposto al N. 138.

Poichè i centri delle circonferenze dell'anulare debbono stare sempre (141) su di una retta le di cui projezioni sui piani coordinati che passano per l'asse del cono direttore fanno coll'asse stesso gli angoli di cui le tangenti sono m,n, le due equazioni (CXXXIII) quì saranno

$$p=mr$$
$$q=nr$$

E quindi, essendo, come abbiam detto (142)

$$\varepsilon=-a\,,\quad \gamma=\pm\sqrt{(b^2-\beta^2)}\,,\quad \varepsilon'=0\,,\quad \gamma'=\mp\frac{\beta}{\sqrt{(b^2-\beta^2)}}$$

la equazione (CXXXV)

$$(\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)p+(\varepsilon-\beta\varepsilon')q-(\gamma-\beta\gamma')r=0$$

del citato numero 138, si trasformerà nell'altra

$$a\beta mr\pm anr\sqrt{(b^2-\beta^2)}+b^2r=0.$$

E da questa e dalle due $p=mr$, $q=nr$, otterremo

$$p=0\,,\quad q=0\,,\quad r=0.$$

*

Quindi le espressioni (CXXXIV) delle distanze δ, α, diventeranno in primo (facendovi $p=q=r=0$)

$$\delta=0$$
$$\alpha=\frac{\omega}{\varepsilon}\sqrt{(\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2)}.$$

Di quì $\varphi_3=0$. E resta a determinare la funzione φ_4, che è quella divenuta α, quando nel suo valore poniamo in primo per γ, ε i precedenti valori, e quindi per β, la funzione ch'essa è delle coordinate x, y, z.

Cominciamo dal calcolarci la ω. E possiamo (138) osservare che essa ω si compone in β, γ, ε, come la seconda delle (CXIII) si compone in x, $f(x)$, $f_1(x)$; e che solo nella (CXIII) la x s'è ritenuta come variabile indipendente, laddove la β è essa stessa una funzione delle x, y, z. Onde potremo immediatamente dedurne, pel caso di che si tratta

$$\omega=K_1;$$

perocchè la derivata β' di β che dovrebb' esser presa in considerazione nella $S(\beta)$, sparisce nei fattori fuori i sommatorii; e di questi l'uno risulta *zero* (143), l'altro dovrebbe moltiplicarsi per *zero*. È dunque nel caso di che si tratta,

$$\alpha=\frac{K_1}{\varepsilon}\sqrt{(\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2)}.$$

Poniamo ora in quest' ultima formola per γ, ε, i loro valori scritti di sopra, ed anche per K_1 il valore particolare $-a$ che gli compete (143). La β ne sparisce da se, e risulta

$$\alpha=\sqrt{(a^2+b^2)}$$

cioè la φ_4 costante, e

$$\varphi_4=\sqrt{(a^2+b^2)}$$

Ed ecco dunque che dati i determinanti della superficie si sono determinate le forme delle funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4; ed anche il valore particolare della costante arbitraria K_1, mentre per la natura dei determinanti dati, la K sparisce da se dalle espressioni della superficie.

II.

145. Per le sostituzioni fatte al N. 143, le equazioni generali (CXIII) della curva di contatto della rigata determinatrice col cono direttore sono diventate le (CXXXVII)

$$\begin{cases} y=-\frac{K_1}{a}\sqrt{(b^2-x^2)} \\ z=K_1 \end{cases}$$

Otterremo dunque le equazioni effettive di essa curva di contatto ponendovi per K_1 il suo valore particolare di che si tratta. Epperò essa curva di contatto è la

$$\text{(CXXXVIII)} \qquad \begin{cases} y=\sqrt{(b^2-x^2)} \\ z=-a \end{cases}$$

cioè la medesima base del cono direttore.

E pertanto dalle forme delle (CXXXVII) conchiuderemo in generale che nelle anulari a cono retto direttore, si avranno anulari di sesta classe, quando la direttrice comune del cono direttore e della rigata determinatrice è una circonferenza di esso cono. Ogni altra curva di esso cono assunta a direttrice comune di esso e della rigata determinatrice, darà anulari di quinta classe.

Di quì è che l'anulare di cui fu trattato nel primo esempio del Capo Secondo, comunque riportata in quel capo come applicazione delle generalità relative alle anulari di quinta classe, non è già un'anulare di questa classe, ma invece una anulare di sesta classe. E di fatto trovammo (79) che la sua rigata determinatrice è una superficie faciente parte del piano $z=-a$; e perciò una superficie sviluppabile e quando la rigata determinatrice di un'anulare a cono direttore è una sviluppabile (2), l'anulare è per lo appunto di sesta classe.

Dati implicitamente i determinanti di un'anulare a cono direttore potremo applicarvi i metodi esposti all'Articolo Quinto del

Capo precedente, e determineremo sempre convenientemente le equazioni dell' anulare, della sua caratteristica, della sua inviluppata, e della rigata ad essa normale, comunque l' anulare possa appartenere alla quinta od alla sesta classe. E la determinazione della equazione della sua rigata determinatrice farà noto se l' anulare appartiene a quella od a questa classe: e così per lo appunto era da avvertirsi al N. 79. che non poteva con quei determinanti aversi un' anulare di quinta classe, ma aversi invece di sesta classe, quando trovammo per equazione della sua rigata determinatrice quella del piano medesimo della base del cono direttore, e propriamente la sua parte al difuori del cono stesso; la quale superficie è sviluppabile, anzi sviluppata essa stessa.

146. I metodi esposti nel paragrafo precedente ci menano ancora alla determinazione della equazione particolare dell' anulare di sesta classe, come or ora abbiam veduto, ma ci menano più particolarmente a farci conoscere quale dovrebb' essere la direttrice comune del cono direttore e della rigata determinatrice, perchè l'anulare generata risultasse di sesta classe. Ed anche ci menano a farci conoscere tra tutte le infinite superficie anulari ad un dato cono direttore, quali siano quelle di sesta classe; ossia quali debbano essere le rigate determinatrici di esse, o la curva di contatto di queste col cono, perchè l' anulare risulti di sesta classe.

E così nell' esempio di che ci siamo occupati abbiamo conosciuto che tra tutte le immaginabili anulari a cono direttore retto a base circolare, sono di sesta classe quelle soltanto le quali hanno a curva direttrice comune al cono ed alla rigata determinatrice, un circolo di esso cono.

Potrebbero così essere dati i determinanti di una anulare a cono direttore da aversi la equazione della sua rigata determinatrice di tale composizione, da non essere facile il rilevarne se sia la superficie da essa rappresentata una rigata sviluppabile oppure no; od anche potrebbero così essere dati essi determinanti per modo da non poter essere facile il determinarne la equazione della determinatrice. In ambi i casi potremmo trovarci imbarazzati quando volessimo esaminare, se l' anulare degli assunti determinanti appartenga alla

quinta od alla sesta classe. Ma l'aver ricorso ai metodi esposti nel paragrafo precedente ci toglierebbe tosto d'imbarazzo.

Così, a cagion di esempio; nell'esempio terzo dell'Articolo Sesto del Capo Secondo, essendo direttrice della rigata determinatrice una retta parallela all'asse del cono direttore è facile conchiuderne che questa rigata è non sviluppabile; onde è manifesto essere quella anulare realmente di quinta classe. Ma se invece di quella retta assunta a direttrice della rigata determinatrice fossesi assunta una curva tracciata su di questa; in qual modo potremmo noi accertarci essere l'anulare di quinta classe, e non di sesta? Eccolo.

Pel metodo esposto nel paragrafo precedente troveremmo; come abbiam trovato di fatto, che le anulari a cono retto a base circolare direttore, sono di sesta classe solo quando hanno a curva direttrice comune di esso e della rigata determinatrice una curva delle equazioni (CXXXVII). Essendo le forme di queste equazioni diverse dalle (LXXXIX), o da qualunque altre a queste equivalenti, conchiuderemmo tosto essere quell'anulare di quinta e non di sesta classe.

Nel Quarto Esempio di quel medesimo paragrafo, fummo condotti ad una equazione assai complicata della rigata determinatrice, che è la (XCIV). Come dunque potere speditamente conoscere dalla forma di questa se l'anulare della equazione (XCII) in quell'esempio determinata sia veramente una anulare di quinta classe, o sia di sesta classe? Eccolo..

Applicheremmo alle equazioni

$$b^2\beta^2+c^2\gamma^2-b^2c^2=0$$
$$\varepsilon+a=0$$

della direttrice del cono direttore (90) il metodo del N.° 135 dell'Articolo precedente, come abbiam fatto al N.° 143 per le equazioni

$$\beta^2+\gamma^2-b^2=0$$
$$\varepsilon+a=0$$

e determineremmo quale esser dovrebbe la curva di contatto di un cono retto a base ellittica colla rigata determinatrice corrispondente,

ossia la curva direttrice comune perchè l'anulare potesse essere di sesta classe. Se risultasse una sezione qualunque normale all'asse del cono per equazione di questa curva, l'anulare della equazione (XCII) in quell'esempio contemplata sarebbe di sesta classe; se nò la è di quinta.

E tutte queste cose mostrano la meravigliosa armonia ch' esiste tra tutte le verità o fatti geometrici nel Capo precedente investigati, e quelli nel presente Capo Terzo esaminati.

III.

147. Noi non ci arresteremo ulteriormente sulle anulari di sesta classe. E molto meno sull' esempio dell' anulare particolare di che ci siamo occupati; perocchè, dopo il fin quì detto, è manifesto che questa è la medesima contemplata nell'Esempio Primo dell' Articolo Sesto del Capo precedente. Potrà non pertanto anche più illustrare ciò che in quell' esempio dicemmo, la determinazione del lato di regresso della rigata determinatrice dell'anulare particolare di che si tratta, del quale lato di regresso le equazioni od espressioni generalissime sono le due (CXI). E per lo appunto colla determinazione di tali equazioni particolari chiuderemo questo Capo Terzo.

Nelle (CXI) poniamo in primo per la costante K_1 il suo valore particolare innanzi determinato $-a$; e sopprimiamovi la K, che per l' anulare particolare di che si tratta non debbe esistere. Ottenghiamo

$$y=-\int\frac{(f(x)-xf'(x))x+(f(x)f_1'(x)-f_1(x)f'(x))f_1(x)}{(f(x)-xf'(x))f(x)+(f_1(x)-xf_1'(x))f_1(x)}$$

$$z=-a-\int\frac{(f_1(x)-xf_1'(x))x-(f(x)f_1'(x)-f_1(x)f'(x))f(x)}{(f(x)-xf'(x))f(x)+(f_1(x)-xf_1'(x))f_1(x)}$$

In queste due equazioni poniamo per $f(x), f_1(x), f'(x), f_1'(x)$, i loro valori (CXXXVI) determinati innanzi (143). Dopo le riduzioni risulta

$$y=-\int\frac{x}{\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$z=-a$$

Ed integrando

$$\begin{cases} y=\sqrt{b^2-x^2} \\ z=-a \end{cases}$$

che sono le medesime (CXXXVIII).

Dunque nell' anulare particolare di che si tratta la linea di regresso della sua rigata determinatrice si confonde colla linea di contatto di questa col suo cono direttore. La circonferenza base di questa dunque è ad un tempo lato di regresso della rigata sviluppabile determinatrice dell' anulare.

Ora se si consideri che una retta che tocchi continuamente una circonferenza di circolo, non può generare che una superficie piana terminata da una parte da essa medesima circonferenza, potremo anche in altra guisa renderci ragione di ciò che dicemmo al N. 79 in ordine alla rigata determinatrice dell' anulare particolare di cui nell' esempio primo dell' Articolo sesto del Capo Secondo ci occupammo, e sulla quale ora quì siamo ritornati.

CAPO QUARTO

DELLE ANULARI DI SETTIMA CLASSE.

---

148. Assai più spedito debbe tornare il dedurre dalle espressioni diverse trovate nel Capo Primo, quelle delle Anulari di Settima Classe, che non fu il dedurne quelle delle Anulari di Quinta e Sesta Classe. Per queste dovemmo determinare (43, 44, 108, 109, 110) il variare della ordinata ω del punto di ciascuna individuata retta del cono direttore il quale è incontrato dalla retta della rigata determinatrice, che giace sul piano tangente esso cono secondo essa individuata retta: nè fu agevolissimo il determinare qual funzione doveva essa ω essere delle coordinate $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$ del punto ove la individuata retta (cui quel punto di ordinata ω apparteneva) si appoggiava alla curva direttrice del cono direttore. Qui invece la ω non debbe variare di valore, comunque varii la retta del cono direttore cui il punto di essa ordinata ω appartiene; perocchè le rette della determinatrice debbono nelle anulari di Settima Classe passare tutte pel vertice stesso del cono direttore, cioè tutte per un solo e medesimo punto di questo, comune a tutte le sue rette. E ciò è indispensabile; perocchè tutte le rette della rigata determinatrice di un' anulare qualunque a cono direttore dovendo sempre stare su di un piano tangente ad esso cono, ed essere perpendicolari ad un tempo alla retta di questo che è di contatto del piano col cono, esse rette della determinatrice non possono costituire altrimenti un cono, come debb' essere per le Anulari di Settima Classe (le quali sono (1) *a cono direttore* e *cono determinatore*), che passando tutte pel vertice del cono direttore dell' anulare.

E poichè ad origine delle coordinate assumemmo (3) per lo appunto il vertice del cono direttore; è manifesto che per le Anulari di Settima Classe debbe essere sempre

$$\omega = 0.$$

E questa sola condizione, di essere la ω uguale a zero, basta introdurre nelle espressioni generalissime trovate nel Capo Primo, per dedurne quelle pertinenti alle Anulari di Settima Classe.

Ora al N. 12 del Capo Primo ponemmo

$$\Delta = \frac{\omega D}{f_1} - \alpha.$$

Sarà dunque per le anulari di Settima Classe

$$\Delta = -\alpha$$

e di fatto, essendo Δ la distanza del piede della perpendicolare (12) calata dal centro di una individuata circonferenza mobile generatrice dell' anulare sul lato di contatto del suo piano col cono direttore, dal vertice di questo; è manifesto che quando le rette della rigata determinatrice passano tutte pel vertice del cono direttore, debb' essere una tal distanza espressa da Δ, per lo appunto uguale al raggio di essa individuata circonferenza, il quale è per lo appunto espresso da α: ed è facile però vedere ancora, che qui la α debb' essere affetta dal segno *meno*.

Ponendo dunque in tutte le espressioni del Capo Primo, pertinenti ad Anulari qualunque a cono direttore, invece di Δ la $-\alpha$, le accomoderemo alle Anulari di Settima Classe; e ne dedurremo le espressioni analitiche di queste. E ciò faremo negli Articoli seguenti.

ARTICOLO I.

Espressione dell' Anulare generale di Settima Classe.

I.

149. Ponendo nella (XX), che è la espressione di una individuata circonferenza di un' anulare qualunque a cono direttore, invece di Δ la *meno* α, otterremo, per le cose dette nel numero precedente, la espressione di una individuata circonferenza, non più di un' anulare a cono direttore qualunque, ma di un' anulare a cono direttore di settima classe. E pertanto la espressione della individuata circonferenza di un' anulare di settima classe qualunque il di cui piano tocca la curva direttrice del suo cono direttore nel punto delle coordinate $\beta, f(\beta), f_1(\beta)$, ha per espressione

(CXXXIX)

$$\left.\begin{array}{l} (2\beta\alpha+xD)Rx-2\delta\left(f^3\left(\frac{\beta}{f}\right)'+f_1^3\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'\right)x \\ (2f\alpha+yD)Ry-2\delta\left(\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'+f_1^3\left(\frac{f}{f_1}\right)'\right)y \\ (2f_1\alpha+zD)Rz-2\delta\left(\beta^3\left(\frac{f}{\beta}\right)'+f^3\left(\frac{f_1}{f}\right)'\right)z \end{array}\right\}+\delta^2DR=0.$$

$$f^2\left(\frac{f_1}{f}\right)'x+f_1^2\left(\frac{\beta}{f_1}\right)'y+\beta^2\left(\frac{f}{\beta}\right)'z=0;$$

La quale è la medesima (XX) fattovi $\Delta=-\alpha$; e quindi ridotta a contenere nel suo secondo membro il solo termine colla δ al secondo grado.

150. Se assumiamo un' individuato punto della individuata circonferenza rappresentata dalle equazioni (CXXXIX), non solo le $\beta, f, f_1, \delta, \alpha$ avranno individuati valori corrispondenti alla individuata circonferenza, ma la x avrà determinato valore; e valori

determinati risulteranno per le y, z. Se vogliamo passare da quell'individuato punto ad un altro contiguo di essa medesima circonferenza, le β, f, f_1 si manterranno costanti, conservando quell' individuato valore; e costanti si manterranno ancora le δ, α essendo tutte queste quantità relative ad una medesima circonferenza individuata; ma varieranno le x, y, z. Se da quel medesimo assunto individuato punto vorremo passare invece ad un' altro punto di un' altra individuata circonferenza pertinente alla medesima anulare, potrà la x ritenere il medesimo precedente determinato valore; ma dovrà variare la β, e con essa le $f(\beta)$, $f_1(\beta)$ perchè varia il piano di essa circonferenza : e con esse varieranno ancora le δ, α; perciocchè variando la circonferenza di posizione, debbe variarne ancora la posizione del suo centro, dato appunto dalle δ, α : e potrebbe ancora in questo secondo contemplato passaggio, colla β variare la x, ma questa indipendentemente da quella.

Finchè dunque le (CXXXIX) rappresentano una individuata circonferenza dell'anulare, le x,y,z, sono indipendenti dalle β, f f_1, δ, α, e queste da quelle: e le y, z vi sono funzioni della x; mentre le f, f_1, δ, α vi sono funzioni della β. La x varierà secondo che si individui un tale o tal altro punto di una medesima individuata circonferenza : la β secondo che s' individui invece una tale o tal altra circonferenza dell' anulare. E poichè la seconda delle equazioni (CXXXIX) esprime in sostanza il piano della circonferenza individuata; è chiaro, che se si assumano ad arbitrio le x, y, z, come le tre coordinate di un individuato punto arbitrario qualunque dell' anulare, otterremo il valore particolare della β che determina la posizione del piano della circonferenza generatrice dell' anulare, al quale quell' individuato punto arbitrario appartiene, risolvendo la seconda delle (CXXXIX) rispetto a β; la risoluzione della quale in massima è sempre possibile; perocchè essa contiene le x, y, z, e le $f(\beta)$, $f_1(\beta)$ funzioni note della β, (3).

Supponiamo risoluta rispetto a β la seconda delle (CXXXIX); e che ne risulti

$$\beta=\varphi(x, y, z).$$

Se porremo questo valore della β nella prima delle (CXXXIX),

la risultante apparterrà non più ad una circonferenza individuata dell' anulare, ma a tutte le immaginabili che la costituiscono: anzi apparterrà a tutti i punti dell' anulare stessa, cioè ne sarà la espressione; perocchè sarà soddisfatta da tutti i valori della x, e dai corrispondenti delle y, z, che ad essa appartengono.

Ottenuto

$$\beta=\varphi(x, y, z)$$

sarà (3)

$$f=f(\varphi(x, y, z))$$
$$f_1=f_1(\varphi(x, y, z))\ ;$$

e supposto che sia

$$\delta=f_2(\beta)$$
$$\alpha=f_3(\beta)$$

lo che si può, perchè δ, α sono anche funzioni di β, sarà

$$\delta=f_2(\varphi(x, y, z))$$
$$\alpha=f_3(\varphi(x, y, z)).$$

Epperò sostituiti nella prima delle (CXXXIX) non solo per β la $\varphi(x, y, z)$, ma per f, f_1, δ, α questi ultimi valori, otterremo la espressione dell' anulare di Settima Classe: e prima di fare una tal sostituzione supponiamo eseguite le operazioni che danno i valori effettivi delle f, f_1, f_2, f_3, ossia che danno non più le funzioni effettive che le f, f_1, δ, α sono della φ, ossia della β, funzione essa stessa delle x, y, z, ma invece le funzioni effettive ch' esse medesime f, f_1, δ, α sono delle x, y, z: e fatte le operazioni risulti

$$\text{(CXL)}\quad \begin{cases} f(\beta)=f(\varphi(x, y, z))=\varphi_1(x, y, z) \\ f_1(\beta)=f_1(\varphi(x, y, z))=\varphi_2(x, y, z) \\ \delta(\beta)=f_2(\varphi(x, y, z))=\varphi_3(x, y, z) \\ \alpha(\beta)=f_3(\varphi(x, y, z))=\varphi_4(x, y, z) \end{cases}$$

151. Sostituiamo ora nella prima delle (CXXXIX) per $\beta, f, f_1, \delta, \alpha$, le $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Ciò che risulta sarà la espressione dell' Anulare di Settima Classe: ed è la

(CXLI)

$$\left.\begin{aligned}&\left(2\varphi\,\varphi_4+x\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)x\rho-2\varphi_3\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)x\\+&\left(2\varphi_1\varphi_4+y\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)y\rho-2\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)y\\+&\left(2\varphi_2\varphi_4+z\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)z\rho-2\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)z\end{aligned}\right\}+$$

$$+\rho\varphi_3^2\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=0$$

nella quale ρ sta pel valore che prende il polinomio R (XIII), quando vi si facciano le dette sostituzioni: ed al solito x, y, z sono le coordinate dell' anulare riferite a tre assi ortogonali colla origine nel vertice del cono direttore; e φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sono funzioni delle x, y, z generate, come è detto nel numero precedente.

152. Abbiamo supposto (150) essere $\varphi(x, y, z)$ il valore della β cavato dalla seconda delle (CXXXIX) quando, dopo messovi per f, f_1 le funzioni effettive ch' esse sono della β, si risolva rispetto alla β stessa.

Se dunque nella seconda delle (CXXXIX) ponessimo per β l' ottenuto suo valore $\beta=\varphi(x, y, z)$ e per f, f_1, le $f(\varphi)$, $f_1(\varphi)$, ossia (CXL) le φ_1, φ_2, la equazione risultante sarebbe identica.

Può dunque la

(CXLII) $$\varphi_1^2\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'x+\varphi_2^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'y+\varphi^2\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'z=0$$

(che è la seconda delle (CXXXIX), quando per β, f, f_1 vi si pongono φ, φ_1, φ_2) ritenersi come equazione identica. Epperò potremmo per mezzo di questa eliminare la φ dalla (CXLI). Dunque la espressione dell' anulare generale di Settima Classe si presenta con cinque funzioni arbitrarie; ma le quali possono sempre ridursi a quattro soltanto: e di queste una per esempio la φ_2 potrebbe anche essere una costante arbitraria, la qual cosa avrebbe luogo, come è evidente, quando la data curva direttrice del cono direttore avesse per equazioni non più le (I)

$$\begin{cases}y=f(x)\\z=f_1(x)\end{cases}$$

come assumemmo al N. 3; ma avesse invece le due

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=a. \end{cases}$$

ove a è una costante arbitraria. Che anzi potremmo sempre così supporre che fossero le equazioni di essa curva direttrice; perocchè date le equazioni di una curva a doppia curvatura, direttrice di un cono, può sempre ridursi questo medesimo ad avere per direttrice una curva piana, e di piano parallelo al coordinato xy. Potremmo dunque semplificare la (CXLI) facendovi uguale zero le derivate della φ_2, od anche della φ_1; ma ciò non faremo in grazia di simmetria.

Pertanto conchiuderemo il

Teorema. *La espressione generalissima delle Anulari di Settima Classe si presenta con cinque funzioni delle tre coordinate, delle quali quattro sono arbitrarie: e di queste quattro quantità arbitrarie, una potrebbe essere anche costante arbitraria.*

II.

153. Supponiamo per un momento che la φ_2 sia costante arbitraria. La funzione φ_1, perchè arbitraria, potrà avere tutte le forme immaginabili diverse.

Abbia una individuata di queste forme. Ritenga sempre essa individuata forma; e restino di forma arbitraria le φ_3, φ_4.

La (CXLI) rappresenterà anulari diverse tante di natura, per quante possono essere diverse queste forme delle φ_3, φ_4; ma tutte avranno certe proprietà comuni, implicitamente espresse dalla funzione φ_1, la quale ritiene per tutte una sola e medesima forma: e tutte quelle per le quali la φ_1 ritiene la medesima forma, possiam dire appartenere tutte ad un medesimo gruppo.

Le anulari tutte di sesta classe dunque saranno di tanti gruppi per quanto può essere diversa di forma la funzione φ_1. Ma quando la φ_2 è costante, come abbiam supposto, e come può sempre supporsi (151), la φ_1 esprime essa sola la natura della curva direttrice del cono direttore, e perciò la natura di questo medesimo cono.

Dunque 1.° le Anulari di Settima Classe sono classificabili in tanti gruppi, per quanti possono essere coni di diversa natura.

Nelle anulari di Settima Classe, determinato il cono direttore, resta implicitamente determinata la rigata determinatrice; poichè questa è un altro cono avente il vertice comune col primo, e le sue rette perpendicolari ciascuna a ciascuna di quelle del cono direttore (148).

Essendo dunque la rigata determinatrice, che determina il genere delle anulari a cono direttore, conchiuderemo, 2.° che tutte le anulari di Settima Classe di un solo e medesimo gruppo, sono tutte di un solo e medesimo genere.

Ed ecco una proprietà in certo modo comune colle anulari di Sesta Classe. Se non che per queste quelle di un medesimo gruppo son tutte di un solo e medesimo genere, come per le anulari di Settima Classe; ma per quelle la rigata di genere può avere infinite posizioni, laddove per queste non può averne che una sola; perciocchè per quelle la rigata determinatrice dipende dalla curva di genere, che è una curva sul cono direttore di natura determinata bensì, ma non di sito (110, 111); mentre che per le anulari di Settima Classe, la rigata determinatrice non dipende che dal vertice del cono direttore pel sito, e da questo medesimo cono per la sua natura (148).

Ritenga ora, nella medesima ipotesi di φ_2 costante, la medesima forma la φ_1; o ciò che torna allo stesso ritengano la medesima forma le φ_1, φ_2; e ad un tempo ritenga la medesima forma la φ_3. L'anulare rappresentata dalla (CXLI) avrà un'altra proprietà comune con tutte le altre anulari corrispondenti a tutte le immaginabili forme della φ_4, la quale proprietà è implicitamente espressa per lo appunto dalla forma particolare della φ_3. E potremo dire essere le anulari di Settima Classe di uno stesso genere e gruppo, di tante specie per quante possono essere diverse le forme della funzione φ_3.

Ora rammentiamoci (9, 10, 11) che δ è la distanza del centro di una individuata circonferenza dell' anulare dal lato del cono direttore, secondo il quale è questo toccato dal piano di essa circon-

ferenza: e che però la funzione φ_3 esprime il variare di essa distanza pel variare delle circonferenze diverse dell' anulare; e dei punti delle quali circonferenze sono coordinate le x, y, z, di cui la φ_3 è funzione (150). E riflettiamo che se dai centri di tutte le circonferenze dell' anulare intendiamo menate le rette perpendicolari ai lati del suo cono determinatore rispettivamente sul piano di ciascuna circonferenza, la distanza del piede di ciascuna di queste perpendicolari dal vertice di esso cono determinatore, è per lo appunto uguale alla distanza di cui una individuata è espressa dalla δ, e tutte dalla φ_3. Ne inferiremo che se sul cono determinatore segneremo una curva continua, i punti di questa curva, tenendosi come i piedi di quelle perpendicolari, la φ_3 rappresenterà le distanze di tutti i punti di una tal curva dal vertice del cono istesso; o ciò che è lo stesso la φ_3 starà per essa medesima curva.

Dunque, perciocchè le anulari di un medesimo gruppo e di un medesimo genere sono di tante specie per quante sono le forme diverse che può prendere la φ_3, conchiuderemo 3.° che le anulari di Settima Classe, di un medesimo gruppo e di un medesimo genere, sono di tante specie per quante sono di natura diversa le curve tracciabili sul cono determinatore.

Ritengano ora non solo la medesima forma le funzioni φ_1, φ_2, φ_3, ma ancora la φ_4. Tutte le anulari rappresentate dalla (CXLI) avranno un' altra proprietà comune, implicitamente espressa dalla φ_4: e potremo dire appartenere tutte non solo ad un medesimo gruppo, genere, e specie, ma ancora ad una medesima varietà. E saranno le anulari dello stesso gruppo, genere, e specie, di tante varietà diverse, per quante possano essere le forme diverse della funzione φ_4.

Ora si consideri che quelle perpendicolari che di sopra abbiamo immaginate calate dai centri delle circonferenze dell' anulare, sono per lo appunto le distanze di cui una individuata dicemmo α, e che sono tutte espresse dalla φ_4; ed inoltre che tutte quelle perpendicolari prolungate costituiscono una superficie rigata ad elementi paralleli a quelli del cono direttore, e che i centri di tutte le circonferenze dai quali esse perpendicolari si sono immaginate menate, costituiscono una curva continua giacente su di essa rigata ad ele-

menti paralleli a quelli del cono direttore; e conchiuderassi 4.° che le anulari di un medesimo gruppo, di uno stesso genere, e di una stessa specie, sono di tante varietà, per quante possono essere di natura diversa le curve tracciabili su di una superficie rigata ad elementi paralleli a quelli del cono direttore, ed avente a direttrice la curva di specie tracciata sul cono determinatore.

ARTICOLO II.

Espressione della Caratteristica dell' anulare generale di Settima Classe.

I.

154. Dopo le cose dette nei N. 148 e 150 è evidente 1.° che la espressione (XXX) di un punto individuato di una individuata caratteristica di un' anulare qualunque a cono direttore, si accommoderà a rappresentare solamente un' individuato punto di una individuata caratteristica dell' anulare generale di settima classe, cambiandovi la Δ in *meno* α; 2.° che così accommodata potrà ridursi a rappresentare non più un punto individuato di una individuata caratteristica, ma la caratteristica tutta intera dell' anulare generale di settima classe, cangiando nelle due prime delle (XXX) β, f, f_1, rispettivamente in $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, e le δ, α rispettivamente in φ_3, e φ_4, e la D in $\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$, e la R in ρ.

Nella seconda delle (XXX) facciamo dunque i detti cangiamenti. Ottenghiamo

$$\text{(CXLIII)} \qquad x\varphi+y\varphi_1+z\varphi_2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)\varphi_1\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=0.$$

È poichè per la sostituzione medesima, la terza delle (XXX) diventa (152) una equazione identica, la (CXLIII) insieme colla (CXLI) rappresentano la caratteristica generale dell' anulare di settima classe, e però ne sono la espressione.

*

Ora la (CXLIII) non contenendo la φ_3, e rappresentando essa sola una superficie, ne inferiremo (153) il

Teorema. *Le anulari tutte di Settima Classe, di qualunque specie sieno, purchè appartengano ad un medesimo stipite di varietà di un medesimo gruppo, hanno le loro caratteristiche, corrispondenti allo stesso parametro di posizione, allogate tutte in una sola e medesima superficie diversa dall' anulare alla quale appartengono.*

La quale proprietà è analoga a quelle enunciate ai N. 53 e 121, competenti alle caratteristiche delle anulari di quinta e sesta classe. Però le anulari delle tre classi a cono direttore hanno questa proprietà comune; cioè che le caratteristiche loro sono tutte su superficie indipendenti dalla specie cui esse appartengono.

Ed è evidente che per le tre classi di anulari a cono direttore, le espressioni (LXIII), (CXXI), e (CXLIII) delle superficie sulle quali si trovano tutte le caratteristiche di un medesimo parametro di posizione, quando sono dello stesso stipite di varietà di uno stesso genere di un medesimo gruppo possono ridursi ad aver tutte un medesimo primo membro ed a differire solo pel secondo. Così ridotte, il loro secondo membro sarà

per le anulari di quinta classe $\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2$

per le anulari di sesta classe $\dfrac{\left(\varphi_1^3\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\Sigma}{\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2}$

per le anulari di settima classe *zero*.

II.

155. Vogliasi ora la espressione di quella caratteristica particolare di un' anulare generale di settima classe, ch' è linea di suo contatto col suo cono determinatore. La otterremo ponendo nella (CXLIII) $A.\text{tang}.\tau=0$, e perciò $\dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$, ch' è il coseno dell'Ang. tang.τ, uguale alla *unità*. Così fatto otteghiamo la espressione semplicissima

(CXLIV) $x\varphi+y\varphi_1+z\varphi_2=0$

ed indipendente dalle φ_3 e φ_4. Dunque il

Teorema. *Tutte le anulari di Settima Classe di uno stesso gruppo, e di qualunque specie e varietà sieno* (153), *hanno tutte la curva di loro contatto colla rigata determinatrice allogata in una sola e medesima superficie diversa da ciascuna di esse.*

Proprietà questa analoga a quelle enunciate ai N. 54 e 122 per le anulari di quinta e sesta classe. E però il

Teorema. *Tutte le anulari delle tre Classi a Cono Direttore hanno le linee di loro contatto colle rispettive rigate determinatrici tutte sopra superficie indipendenti non solo dalle specie, ma anche dalle varietà loro.*

156. Se facessimo nella (CXLIII) $\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}=0$, cioè A. tang. $\tau=1^q$, od $=3^q$, ne otterremmo una trasformata, dalla quale concluderemmo esistere anche per le anulari di settima classe, proprietà analoghe a quelle enunciate ai N. 55 e 123 per le anulari di quinta e sesta classe.

E dal modo come la (CXLIII) è composta, si scorge del pari ch' essa perde la φ_4 nel solo caso di A.tang.$\tau=0$.

ARTICOLO III.

Espressione della Inviluppata Rigata all' anulare generale di Settima Classe.

I.

157. Per ottenere la espressione della inviluppata rigata all 'anulare generale di settima classe, cominciamo dal moltiplicare tanto il numeratore, quanto il denominatore di ciascun membro della (XLI) per DR, quindi generalizziamovi le derivate, e dopo in ciascun membro riuniamo in uno i termini che moltiplicano R. Otteghiamo così una trasformata della (XLI) che rappresenta ancora

una retta individuata della inviluppata (33) all'anulare qualunque a cono direttore. E posto nella trasformata invece di Δ la $-x$, l'avremo ridotta (148) a rappresentare una individuata retta della inviluppata dell'anulare di settima classe. E ne dedurremo la espressione di essa medesima inviluppata, ponendo nella trasformata che si sarà da ultimo ottenuta per $\beta, f, f_1, \delta, \alpha$, rispettivamente le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, e per D il $\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2}$, e per R la ρ, come è evidente per le cose dette al N. 150.

Fatte tutte le enunciate operazioni e sostituzioni, e messo anche per τ la frazione $\frac{s}{c}$, talchè s e c sono rispettivamente il seno ed il coseno dell' $A.\text{tang}.\tau$, otteghiamo infine per espressione della inviluppata rigata generale dell'anulare pur generale di settima classe la

$$\text{(CXLV)} \quad \frac{(\varphi_3-s\varphi_4)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)-\left((1-c)\varphi_1\varphi_4+y\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)\rho}{(\varphi_3-s\varphi_4)\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)-\left((1-c)\varphi_2\varphi_4+z\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)\rho}=$$

$$=\frac{\left\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'+\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'\right\}s\varphi_1^2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)c\rho}{\left\{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'+\left(\varphi_1^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right)\left(\frac{\varphi}{\varphi_2}\right)'\right\}s\varphi_2^2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)c\rho}$$

II.

158. Da questa ultima espressione si dedurrà quella di una inviluppata particolare dell'anulare generale di settima classe, sostituendovi il corrispondente particolar valore del parametro di posizione τ, ossia delle s e c.

Così, facendovi $A.\text{tang}.\tau=0$, ossia $s=0$, e $c=1$, otterremo la inviluppata rigata, che è il cono determinatore medesimo della superficie. Facciamo tal sostituzione, e liberiamo dai fratti la trasformata che ne risulta. Dopo le riduzioni otteghiamo

(CXLVI)

$$\Big\} y\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)' + \varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right) - z\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)' + \varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\Big\}\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)}=0$$

Espressione indipendente dalle φ_3 e φ_4. Dunque il

Teorema. *Tutte le anulari di Settima Classe, purchè sieno di un medesimo gruppo* (153), *ammettono un solo e medesimo cono determinatore, di qualunque specie, varietà e grandezza esse sieno.*

La quale proprietà pure è analoga a quelle enunciate al N.57 per le anulari di quinta classe, ed al N. 125 per quelle di sesta. Epperò l'altro

Teorema. *Le rigate determinatrici delle anulari delle tre Classi a Cono Direttore, sono tutte indipendenti dalla specie e dalla varietà alle quali esse anulari appartengono.*

Se nella espressione (CXLVI) per la φ rimetteremo la β, e per φ_1, φ_2 rispettivamente le $f(\beta)$, $\varphi_1(\beta)$; essendo

$$\begin{cases} y=f(\beta) \\ z=f_1(\beta) \end{cases}$$

le equazioni della curva direttrice di un cono qualunque, come assumemmo (3), avremo modo, per mezzo di essa (CXLVI) così trasformata, di risolvere speditamente questo problema: cioè date solo le equazioni della curva direttrice di un dato cono, trovare quella di un'altro cono avente il medesimo vertice, di cui i lati risultino tutti normali ciascuno a ciascuno a quelli del dato. E ciò è chiaro per le cose dette.

Se paragoneremo la (CXLVI) colla espressione (LXVII) della determinatrice dell'anulare di quinta classe, vedremo che la differenza loro stà in ciò, che dalle y, z visibili n'è sottratto rispettivamente φ_1, φ_2 quando trattasi di anulari di quinta classe, mentre nulla n'è sottratto per quelle di settima.

159. Che se faremo $A.\text{tang.}\tau=2^q$; e porremo però $s=0$, e $c=-1$ nella medesima (CXLVI); otterremo la espressione della inviluppata in sublime dell'anulare, ossia quella i di cui elementi sono pur paralleli a quelli del cono determinatore. Fatta la sosti-

tuzione, e quindi liberata la equazione dai fratti, e fatte le riduzioni risulta

(CXLVII)

$$\left[y\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)-z\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\right]\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)}=$$

$$=2\varphi_4\left[\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\varphi_2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\varphi_1\right]\rho$$

E quì osserveremo che il secondo membro della (LXVIII) espressione della inviluppata in sublime dell' anulare di quinta classe, è del tutto identico a quello della espressione quì trovata della inviluppata in sublime di settima classe: ed esse espressioni differiscono nelle forme solo per ciò ch'è sottratto dalle y, z visibili.

Intanto quest' ultima espressione (CXLVII) essendo come l'altra (LXVIII) indipendente dalla φ_3, ne conseguita che per le anulari di settima classe ha luogo un teorema analogo a quello enunciato al N. 58 per quelle di quinta classe.

ARTICOLO IV.

Espressione della Rigata a Generatrici Normali ciascuna a ciascuna di quelle della inviluppata.

I.

160. Dalle cose predette (36, 148, 150) risulta che se in una delle (XLIV), che esprimono una individuata retta della rigata a generatrici normali a quelle della inviluppata, poniamo per Δ la $-\alpha$, vi generalizziamo le derivate, e quindi sostituiamo alla β la φ, alla f la φ_1, alla f_1 la φ_2, alla δ la φ_3, ed alla α la φ_4: e perciò anche alla D la $\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)}$, ed alla R la ρ; ne dedurremo la espressione generalissima della rigata a generatrici normali ciascuna a ciascuna di quelle della inviluppata all'anulare generale di settima classe.

Facciamo dunque le dette operazioni sulla seconda delle (XLIV); ma prima, per ottenerne forma più semplice, moltiplichiamo il numeratore e denominatore di ciascun suo membro per DR, ed alla tangente τ sostituiamo la frazione $\frac{s}{c}$, che è il seno diviso pel coseno dell' A.tang.τ. Fatto tutto ciò, e dopo qualche riduzione ottenghiamo

$$\text{(CXLVIII)}\quad \frac{\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)-\left(\varphi_4\varphi_1+y\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)\cdot\rho}{\varphi_3\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)-\left(\varphi_4\varphi_2+z\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}\right)\cdot\rho}=$$

$$=\frac{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)s+c\varphi_1\rho}{\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)s+c\varphi_2\rho}$$

E questa è la espressione della rigata ad elementi normali ciascuno a ciascuno a quelli della inviluppata rigata all' anulare generale di settima classe.

II.

161. Dando valori particolari al parametro di posizione τ (36), ossia alle quantità equivalenti s e c, determineremo la rigata a generatrici normali a quelle di una inviluppata particolare all' anulare generale di settima classe.

Così se facciamo A.tang.$\tau=0$, ossia $s=0$, e $c=1$, ottenghiamo la rigata a generatrici normali a quelle del cono determinatore e ad un tempo parallele a quelle del cono direttore. E fatte le sostituzioni, indi liberata la equazione dai fratti, ed eseguite le riduzioni risulta

(CXLIX)

$$(y\varphi_2-z\varphi_1)\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}=\varphi_3\left[\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\varphi_2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\varphi_1\right]$$

Espressione indipendente da φ_3. Dunque come per le anulari di quinta e sesta classe (61, 128) si ha il

Teorema. *Tutte le immaginabili anulari di Settima Classe, purchè appartengano ad un medesimo gruppo e ad una medesima specie* (153), *di qualunque varietà sieno, hanno i centri delle loro circonferenze generatrici allogati in una sola e medesima rigata ad elementi paralleli a quelli del cono direttore.*

E se avessimo fatto invece $A.\text{tang}.\tau=2^q$, ossia $s=0$, $c=-1$, dalla (CXLVIII) la medesima (CXLIX) avremmo ottenuta; ond'è che ad amb' i casi risponde una sola e medesima rigata normale alla inviluppata. E così debb' essere, perocchè al caso di $A.\text{tan}.\tau=2^q$, risponde la inviluppata in sublime dell' anulare; e questa ha i suoi elementi paralleli ciascuno a ciascuno a quelli del cono determinatore.

162. Cosa assai degna di attenzione si è, che la espressione (CXLIX) della rigata a generatrici normali ciascuna a ciascuna di quelle del cono determinatore dell' anulare di settima classe è perfettamente identica alla (CXXVII) della rigata a generatrici normali a quelle della sviluppabile a lato di regresso dell' anulare di sesta classe; ed anche alla (LXX) della rigata ad elementi normali alla rigata non sviluppabile dell' anulare di quinta classe. Per le quali cose se le funzioni φ, φ_1, φ_2, e φ_3 componenti di esse, avessero per tutte una sola e medesima forma, anzi i medesimi valori, le tre superficie che esse rappresentano in una sola e medesima si confonderebbero. Ma per le anulari tutte a cono direttore, (51, 120, 153), le φ, φ_1, φ_2 ne determinano il gruppo, e la φ_3 la specie. Dunque il

Teorema. 1.° *Tutte le anulari a Cono Direttore di ugual natura, siano esse di Quinta, Sesta, o Settima Classe, purchè appartengano a famiglie di specie, di un medesimo stipite, hanno i centri delle loro circonferenze mobili su rigate di ugual natura.*

2.° *Se intorno ad un medesimo cono direttore, sieno quante anulari diverse si vogliano, di Quinta, Sesta, o Settima classe, e comunque diverse di grandezza, di genere o di varietà, avranno i centri di tutte le circonferenze generatrici allogati tutti in una sola e medesima rigata, ad elementi normali ad un tempo alle*

determinatrici di tutte esse, purchè variino per tutte ugualmente le distanze del centro di ciascuna di esse circonferenze delle anulari, da un medesimo lato di contatto del cono intorno cui esse anulari stanno, coi piani di esse medesime circonferenze.

163. Nella (CXLVIII) facciamo ora $s=1$, $c=0$, od anche $s=-1$, e $c=0$; li quali valori corrispondono rispettivamente ai casi di $A.\text{tang}.\tau=1^q$, ed $A.\text{tang}.\tau=3^q$. In ambi i casi fatte le sostituzioni, e quindi liberata la equazione dai fratti, la (CXLVIII) porge

(CL)

$$\left[y\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)-z\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\right]\rho\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)}=$$

$$=\varphi_4\left[\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\varphi_2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\varphi_1\right]\rho$$

Espressione questa della rigata particolare a generatrici normali a quelle della inviluppata, la quale li ha ad un tempo paralleli a quelli del cono determinatore. E poichè è dessa indipendente dalla φ_3 come per le anulari di quinta (62) e sesta classe (129) ne conchiuderemo il

Teorema. *Tutte le anulari di Settima Classe di un medesimo gruppo* (153), *e di qualunque specie sieno, purchè appartengano ad una medesima varietà, hanno i centri delle loro circonferenze generatrici, allogati in una sola e medesima rigata ad elementi paralleli a quelli del cono determinatore.*

E quì potremo pur fare paragone tra le forme delle (CXLVI), (CL), e (CXLVII); e potremo renderci ragione geometrica della differenza loro, come già facemmo trattando delle anulari di quinta e sesta classe (62, 130), in considerando che tutte tre le rigate da esse espresse sono ad elementi paralleli tra loro, e che di tre rispettivi elementi o rette loro parallele, quelli della rappresentata dalla (CL), è equidistante dagli altri due.

*

III.

164. Poichè le rigate ad elementi normali a quelli della inviluppata, passano tutte per la curva dei centri delle circonferenze generatrici dell' anulare, è chiaro che le espressioni di due diverse individuate di esse rigate, quando simultaneamente considerate, rappresenteranno la detta curva dei centri. E che però le (CXLIX) e (CL) sono insieme la espressione della curva istessa: od invece di esse, due che da esse medesime emergano.

Di esse dividiamo la prima per la seconda; e liberiamo dai fratti quella che ne deriva; ed assumiamo ad espressione della curva di che si tratta, questa medesima ultima trasformata, e la (CXLIX). Ottenghiamo, per espressione della curva dei centri, le due seguenti, di forma tra loro assai analoghe.

$$\varphi_3\left[\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)\varphi_2-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)\varphi_1\right]=(\varphi_2 y-\varphi_1 z)\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)}\cdot\rho$$

(CLI)

$$\varphi_3\left[\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2{}^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)z-\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1{}^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)y\right]=(\varphi_1 z-\varphi_2 y)\varphi_1\cdot\rho$$

ARTICOLO V.

Dati i Determinanti di un' Anulare Particolare di Settima Classe, determinarne la equazione; e determinare quelle della sua caratteristica, della inviluppata, e della rigata a generatrici normali a quelle della inviluppata.

I.

165. Nelle anulari di Settima Classe, la rigata determinatrice risultando implicitamente data di natura e posizione, dato che sia il cono direttore soltanto (148), non potranno assumersi ad arbitrio come dati, che il cono direttore e la legge del variare delle distanze del centro della circonferenza mobile che genera l' anulare, in ogni sua posizione, dai lati del cono direttore e da quelli del cono determinatore, i quali sono su di un medesimo piano con essa circonferenza in ogni sua posizione.

Ora *cotesti tre determinanti* possono esser dati od esplicitamente, od implicitamente; ed in ciascuno di questi due casi, bisognerà dedurne le forme delle funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Perciocchè le espressioni dell' anulare di Settima Classe, della sua caratteristica, della inviluppata, e della rigata a generatrici a quelle della inviluppata normali, componendosi dalle x, y, z, e dalle dette funzioni di queste, determinate esse funzioni, risulteranno determinate le espressioni medesime; e quindi risulteranno date le equazioni dell' anulare, e di tutte le altre cose, delle quali nei quattro articoli precedenti abbiamo trovate le espressioni.

II.

166. In primo luogo siano esplicitamente dati i detti tre determinanti dell' anulare particolare di Settima Classe. E sia

$$\mathcal{L}_1(x, y, z)=0$$

la equazione del suo cono direttore. Assumiamo un' altra superficie, che tagli le rette tutte di esso cono; (superficie che potrebbe anche essere un piano, e sempre una sfera col centro nel vertice del cono). E sia la equazione di quest' altra superficie

$$\mathcal{L}_2(x, y, z)=0.$$

Chiamiamo $\beta, \gamma, \varepsilon$ le coordinate della curva d' intersezione delle due superficie di equazioni $\mathcal{L}_1=0$, $\mathcal{L}_2=0$. La curva d' intersezione sarà come direttrice del cono direttore; le equazioni di essa curva saranno soddisfatte dalle $\beta, \gamma, \varepsilon$; e con esse equazioni sussisteranno le loro derivate prime rispetto a β, e la equazione del piano ad essa curva tangente nel punto di coordinate $\beta, \gamma, \varepsilon$.

Inoltre nota la legge del variare delle distanze del centro della circonferenza mobile dalle rette del cono direttore, e del cono determinatore, anzidetti (165), debb' esser nota una relazione tra la distanza δ e le coordinate x, y, z, e l'altra distanza α ed esse medesime coordinate. E siano

$$\mathcal{L}_3(\delta, x, y, z)=0$$
$$\mathcal{L}_4(\alpha, x, y, z)=0$$

cosiffatte relazioni.

Avremo le sette relazioni

$$\text{(CLII)}\quad \begin{aligned} \mathcal{L}_1(\beta, \gamma, \varepsilon)&=0\\ \mathcal{L}_2(\beta, \gamma, \varepsilon)&=0\\ \mathcal{L}_1'(\gamma)\gamma'+\mathcal{L}_1'(\varepsilon)\varepsilon'&=0\\ \mathcal{L}'_2(\gamma)\gamma'+\mathcal{L}_2'(\varepsilon)\varepsilon'&=0\\ (\gamma\varepsilon'-\gamma'\varepsilon)x+(\varepsilon-\beta\varepsilon')y-(\gamma-\beta\gamma')z&=0\\ \mathcal{L}_3(\delta, x, y, z)&=0\\ \mathcal{L}_4(\alpha, x, y, z)&=0 \end{aligned}$$

Dalle quali conosceremo tutte e cinque le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, nel modo che esponemmo al N.° 68, trattandosi delle anulari di Quinta Classe.

III.

167. Siano ora non più esplicitamente, ma invece implicitamente dati i determinanti della superficie. E siano

$$\mathcal{L}_1(\beta, \gamma, \varepsilon)=0$$
$$\mathcal{L}_2(\beta, \gamma, \varepsilon)=0$$

le equazioni della curva direttrice del cono direttore; e

$$\mathcal{L}_3(p, q, r)=0$$
$$\mathcal{L}_4(p, q, r)=0$$

quelle della curva luogo dei centri della circonferenza mobile che genera l' anulare.

Avremo per determinare le forme delle funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, le medesime dieci equazioni (LXXV) del N. 70, e se ne dedurranno le forme di esse nel modo espresso in quel medesimo numero.

ARTICOLO VI.

Applicazione delle cose esposte negli Articoli precedenti.

ESEMPIO PRIMO.

I.

168. Potrà giovare il determinare la equazione dell' anulare particolare di Settima Classe, i di cui determinanti sieno analoghi a quelli dell' anulare particolare di cui trattammo nel primo esempio dell' Articolo Sesto del Capo Secondo, ed anche nell' Articolo Sesto del Capo Terzo. Ed è però che di una tale anulare particolare in questo primo esempio ci occuperemo.

Siano dunque esplicitamente dati i determinanti di un' anulare particolare di Settima Classe, della quale il cono direttore sia un cono retto a base circolare. E del quale siane

a l' altezza

b il raggio della sua base.

Assunti gli assi coordinati, come è detto innanzi (3), sarà la equazione del cono direttore, come è noto per gli elementi,

$$a^2(x^2+y^2)=b^2z^2$$

Inoltre le due relazioni tra la δ e le x, y, z, e la α e le medesime x, y, z, che danno le leggi del variare delle distanze del centro della circonferenza mobile dai lati del cono direttore e del cono determinatore, i quali sono sul piano della circonferenza medesima in ogni sua posizione, siano le

$$\delta=0$$
$$\alpha=\sqrt{(a^2+b^2)}$$

Siano cioè per questa anulare particolare di Settima Classe le distanze δ, α costanti; e la prima uguale a *zero*, la seconda uguale al lato del cono direttore terminato dal suo vertice e dalla sua base: onde per l' anulare particolare di che si tratta è tale la legge del variare delle distanze δ, α, che il centro della circonferenza mobile, sua generatrice, percorre nel movimento di questa la circonferenza medesima della data base del cono direttore.

Siamo quì al caso del N. 166.

Però assumiamo il piano $z=-a$, per la superficie la di cui equazione dicemmo $\mathcal{L}_2=0$. Le due prime equazioni delle (CLII) saranno sostituite dalle

$$a^2(\beta^2+\gamma^2)=b^2\varepsilon^2$$
$$\varepsilon=-a$$

ossia dalle due

$$\beta^2+\gamma^2=b^2$$
$$\varepsilon=-a$$

Ed è evidente che stando ai metodi esposti al N. 166, e per esso al N. 68, qui le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ risulteranno determinate delle forme medesime che il furono al N. 73. Onde insieme colle φ_3, φ_4

esplicitamente date nelle δ, α, le φ, φ_1, φ_2 saranno le (LXXVII) riportate in quel medesimo numero, e le quali è inutile quì scrivere di nuovo.

Ed eccoci al caso di un' anulare di Settima Classe, per la quale non solo i suoi determinanti, ma le medesime funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, hanno la medesima forma, anzi sono identiche a quelle spettanti all' anulare particolare contemplata nel primo esempio dell' Articolo Sesto del Capo Secondo.

II.

169. Per determinare la equazione dell' anulare particolare di Settima Classe di che si tratta, nella (CXLI) poniamo per φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 i loro valori (LXXVII): e cominciando dal porvi per φ_3 lo *zero*, e per $\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$ il valore $\sqrt{(a^2+b^2)}$ che ne risulta; e dopo ponendovi per φ, φ_1, φ_2 i loro valori suddetti. Otteughiamo, dopo le prime due sostituzioni,

$$(x^2+y^2+z^2+2x\varphi+2y\varphi_1+2z\varphi_2)\rho\sqrt{(a^2+b^2)}=0$$

La quale equazione si scinde nei due fattori

$$\text{(CLIII)} \qquad \rho\sqrt{(a^2+b^2)}=0$$

$$\text{(CLIV)} \qquad x^2+y^2+z^2+2x\varphi+2y\varphi_1+2z\varphi_2=0$$

170. Consideriamo il secondo dei fattori. E poniamovi per $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ i detti loro valori (LXXVII). Risulta la equazione liberata dai fratti

$$\text{(CLV)} \qquad a(x^2+y^2)(2az-x^2-y^2-z^2)+2b^2x^2z=$$
$$2by\left(x\sqrt{a^2x^2+a^2y^2-b^2z^2}+\sqrt{a^2(x^2+y^2)^2-(bxz-y\sqrt{a^2x^2+a^2y^2-b^2z^2})}\right)$$

171. L' altro fattore essendo divisibile per $\sqrt{(a^2+b^2)}=0$, si riduce a

$$\rho=0$$

E questo, come dimostrammo al N. 77, ci mena a $\frac{\varphi}{b}=sen.K$, od anche $\frac{\varphi}{b}=cos.K_1$. Essendo K, K_1 costanti arbitrarie. Onde la ρ

equivale ad una costante, ed il fattore $\rho=0$ ci mostra che la φ debb' essere non mai maggiore di b, e per sua natura sempre reale. E però debb' essere la

$$z \text{ non maggiore di } \frac{a}{b}\sqrt{(x^2+y^2)}\ ;$$

perciocchè se z fosse maggiore di un tal valore la quantità

$$a^2x^2+a^2y^2-b^2z^2$$

sarebbe negativa, e quindi la φ immaginaria.

Il più gran valore competente alla z dunque, qualunque sieno d' altronde le x, y, sarà la

$$z=\frac{a}{b}\sqrt{(x^2+y^2)}$$

172. Or sostituiamo questo più gran valore della z nella (CLV). Ottenghiamo, dopo le riduzioni,

$$2ab(a^2+b^2)(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2)}=a(a^2+b^2)(x^2+y^2)^2$$

che come è evidente riducesi a

$$2b=\sqrt{(x^2+y^2)}$$

Dunque l' anulare di che si tratta ha tutti i suoi punti, i più lontani dal piano coordinate xy, allogati in una circonferenza di circolo di equazione

$$x^2+y^2=4b^2\ ;$$

epperò di raggio doppio di quello del circolo base del cono. E pertanto se nel più gran valore di z notato di sopra, porremo per x^2+y^2 la $4b^2$, abbracceremo ad un tempo tutti i punti dell' anulare i più distanti dal piano xy. E così fatto, risulta

$$z=\frac{a}{b}\,.\,2b=2a$$

L' anulare di che si tratta dunque è terminata in un piano parallelo alla base del cono direttore, e distante da questa per la doppia altezza del cono stesso: nè al disotto evvi superficie, comunque valori maggiori della z potessero pur soddisfare la equazione (CLIV). Ed ecco perchè presentasi il fattore $\rho=0$, del quale pure debbesi tener conto: e questo fatto è analogo all' altro contemplato al N.78.

III.

173. Analogamente a quanto dicemmo dal N. 75 al N. 78, anche nel caso attuale, la (CLIV) può semplificarsi per modo, da non lasciare traccia delle funzioni che la generano; onde poi otterrebbesi la equazione di una superficie più vasta dell' anulare generata: epperò avremo novella prova della proposizione enunciata al N.79; cioè *che la particolare genesi di una superficie non è data dalla sua equazione, ma sibbene dalle funzioni che essa equazione generano: e che essa equazione esprime propriamente una proprietà, la quale può non appartenere esclusivamente alla superficie generata.*

Abbiamo detto (152) che la (CXLII) equivalente all'altra

$$(\varphi_2'\varphi_1-\varphi_2\varphi_1')x+(\varphi'\varphi_2-\varphi\varphi_2')y+(\varphi_1'\varphi-\varphi_1\varphi')z=0 \tag{CLVI}$$

può aversi come una equazione identica; e che però per essa può eliminarsi la φ dalla (CXLI). Può dunque dall' ultima scritta eliminarsi anche la φ per essa medesima (CXLI) od anche può eliminarsene una qualunque delle φ_1, φ_2.

Ora dalle forme (LXXVII) delle φ_1, φ_2, abbiamo

$$\varphi_2'=0\ ,\quad \varphi^2=b^2-\varphi_1^2\ ;$$

e dalla seconda di questa, la relazione

$$\varphi\varphi'=-\varphi_1\varphi_1'.$$

Onde la (CLVI) a causa di $\varphi_2'=0$, diventa in primo

$$-\varphi_2\varphi_1'x+\varphi_2\varphi'y+(\varphi_1'\varphi-\varphi_1\varphi')z=0\ ,$$

e poi per la eliminazione da questa della φ_1', a causa dell' ultima relazione, diventa

$$\varphi x+\varphi_1 y-\frac{\varphi^2+\varphi_1^2}{\varphi_2}z=0$$

ed infine, facendo in questa

$$\varphi^2+\varphi_1^2=b^2\ ,\quad \text{e}\quad \varphi_2=-a\ ,$$

come di fatto è (168), la (CLVI) diventa

$$x\varphi+y\varphi_1+\frac{b^2}{a}z=0$$

Possiamo dunque per mezzo di questa, che tiene luogo della (CXLII), eliminare dalla (CLIV), che tien luogo della prima delle (CXLI), la φ, o la φ_1 o la φ_2, od anche più di queste, ove sia possibile.

Eliminiamone dunque φ, e φ_1 ponendo nella (CLIV) per $x\varphi+y\varphi_1$, il suo valore $-\frac{b^2}{a}z$, cavato dalla precedente.

Ottenghiamo per più semplice espressione dell' anulare di che si tratta la

$$2(z\varphi_2-\frac{b^2}{a}z)+x^2+y^2+z^2=0$$

Onde poi per φ_2 ponendovi il suo valore $-a$, ne risulta, per equazione di essa anulare particolare di Settima Classe la

$$x^2+y^2+z^2=\frac{2(a^2+b^2)}{a}.z \qquad \text{(CLVII)}$$

ch' è la equazione di una sfera.

Se in questa cambiamo le coordinate, facendo

$$z=t+\frac{a^2+b^2}{a}$$

essendo t la nuova coordinata computata sull'asse del cono direttore, ottenghiamo per equazione della sfera ridotta al suo centro la

$$x^2+y^2+t^2=\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2}$$

L' anulare dunque, qual' è generata, rappresentata dalla simultanea esistenza dei due fattori (CLIII), (CLIV), è parte di una sfera che passa pel vertice del cono direttore, che ha il centro sull' asse di questo, e di cui il raggio è terzo proporzionale dopo l' altezza del dato cono retto direttore dell' anulare, ed il suo lato terminato dalla base e dal suo vertice.

Le (CLIII), (CLIV) conservando esplicite le forme delle funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, e la (CLIII) esprimendo la natura della φ_1, invol-

gono la genesi dell'anulare generata : la (CLVII) non più conservando esse forme, ma avendole nascose avviluppandole ad un tempo, esprime una proprietà dell'anulare, ma comune a quella della sfera del detto centro e del detto raggio.

L'anulare dell'esempio primo dell'Articolo Sesto del Capo Secondo è una zona sferica di altezza $2a$; l'anulare nel presente esempio contemplata è una calotta sferica di pari altezza $2a$: Entrambe generate da circonferenza di ugual raggio $\sqrt{a^2+b^2}$, moventesi col diametro sul lato di un medesimo cono retto e col piano sempre a questo tangente; ma in quella il centro di essa giace sempre nel vertice del cono, in questa il centro ne giace sempre sulla base. E comunque la circonferenza generatrice sia di ugual raggio, tanto nell'una, quanto nell'altra anulare; e comunque l'altezza della prima superficie generata, sia uguale a quella della seconda; pure la prima anulare e la seconda possono essere parti di sfere bensì, ma l'una dall'altra assai di raggio diverse.

IV.

174. Vogliasi ora la equazione della caratteristica dell'anulare particolare di che quì si tratta.

Poniamo in primo per $\sqrt{(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)}$ la $\sqrt{(a^2+b^2)}$ nella (CXLIII). Colla espressione (CLIV)

$$x^2+y^2+z^2+2x\varphi+2y\varphi_1+2z\varphi_2=0$$

dell'anulare, avremo l'altra

(CLVIII) $$x\varphi+y\varphi_1+z\varphi_2+(1-c)\varphi_4\sqrt{(a^2+b^2)}=0$$

E queste due (154) rappresentano la caratteristica. Poniamo nella seconda per φ_4 il suo valore; ed essa seconda diventa

$$2x\varphi+2y\varphi_1+2z\varphi_2+2(1-c)(a^2+b^2)=0$$

Onde poi, combinando questa colla prima, otteghiamo

$$x^2+y^2+z^2=2(1-c)(a^2+b^2).$$

Dunque le caratteristiche dell' anulare di che si tratta sono tutte su sfere di raggio variabile, dallo *zero* a $2\sqrt{a^2+b^2}$. Sono dunque (173) circonferenze di circolo coi piani paralleli al piano xy di raggio variabile dallo *zero* sino a $2\sqrt{a^2+b^2}$.

175. Sia $c=+1$. Sarà

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

La linea di contatto dell' anulare dunque colla sua rigata determinatrice (155) per quest' anulare particolare di Settima Classe si riduce ad un punto nel vertice stesso del cono direttore.

V.

176. Per avere la equazione della rigata determinatrice, che per le anulari di Settima Classe è un cono, cominciamo dal levare dalla espressione generale (CXLVI) del cono determinatore il fattore $\rho(\varphi^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2)$, per lo quale è divisibile, per essere esso qui tutto costante. Ottenghiamo

$$\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi}\right)'+\varphi_1^3\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'\right)y=\left(\varphi^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)'+\varphi_2^3\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'\right)z$$

E prima di sostituirvi per $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, i loro valori, teniamo conto di ciò: che per essere (167), $\beta^2+\gamma^2=b^2$, è anche $\varphi^2=b^2-\varphi_1^2$; e quindi $\varphi\varphi'=-\varphi_1\varphi_1'$. Effettuati i calcoli nella espressione precedente, risulta immediatamente, (e senza uopo di porre per $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ i loro valori)

$$z=0$$

Dunque l'anulare particolare di che si tratta, anzichè avere per rigata determinatrice un cono, ha un piano determinatore: ed è il piano xy. Ed ove si consideri che un cono è generato da una retta che passa sempre per un punto e si appoggia ad una curva data, si conchiuderà che eziandio come un cono debbe considerarsi la superficie generata, quando questa curva direttrice del cono sia una curva piana, e quel punto sia sul piano di essa medesima curva.

Ond' è che nell' anulare particolare di che si tratta il piano xy è di fatto il suo cono determinatore.

Ed al numero precedente abbiamo veduto aversi per linea di contatto dell' anulare particolare di che si tratta col cono determinatore un punto; ed un piano non può toccare una sfera che in un punto.

177. Sostituendo parimenti le effettive determinate funzioni rappresentate dalle φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 nelle altre espressioni trovate innanzi, troveremmo le equazioni di una inviluppata qualunque, e di una qualunque rigata ad elementi normali a quelli della inviluppata. Ma ciò non faremo: invece ci faremo a determinare le forme delle funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 per un' altra anulare, i determinanti della quale non sieno espliciti, ma sieno invece implicitamente dati.

ESEMPIO SECONDO.

I.

178. Assunti tre assi coordinati ortogonali rettangoli, sia una parabola di piano parallelo al coordinato xy, e col vertice sull'asse delle z la curva direttrice del cono direttore di un' anulare; e la origine delle coordinate sia il vertice del cono stesso. Ed una retta parallela all' asse delle y sia il luogo dei centri della circonferenza mobile dell' anulare.

Siamo quì al caso contemplato al N. 167; e chiamato

b il semiparametro della parabola
a la distanza del suo piano dal piano coordinato xy
l la distanza della data retta dal medesimo piano xy, e
k la distanza della retta stessa dal piano yz

le dieci relazioni determinatrici (LXXV) saranno rimpiazzate dalle equazioni

(CLIX)

(1) $\gamma^2-2b\beta=0$

(2) $\varepsilon+a=0$

(3) $\gamma\gamma'-b=0$

(4) $\varepsilon'=0$

(5) $abx-a\gamma y-b\beta z=0$

(6) $p=-k$

(7) $r=-l$

(8) $abp-a\gamma q-b\beta r=0$

(9) $$\delta=\sqrt{\left(p^2+q^2+r^2-\frac{(\beta p+\gamma q+\varepsilon r)^2}{\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2}\right)}$$

(10) $$\alpha=\left(1-\frac{\beta p+\gamma q+\varepsilon r}{\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2}\right)\sqrt{(\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2)}$$

delle quali le prime due sono le equazioni della parabola direttrice del cono, e la terza e la quarta sono le derivate loro.

179. Dalla prima delle (CLIX) risulta

$$\beta=\frac{\gamma^2}{2b}$$

e sostituito questo valore nella quinta, e risolutane la trasformata rispetto alla γ, otterremo il valore di questa in funzione di x, y, z; e quindi anche la β in funzione di x, y, z. E però dalle prime cinque delle (CLIX) risulta

$$\varphi=\frac{1}{2bz^2}\left(ay\mp\sqrt{(a^2y^2+2abxz)}\right)^2$$

$$\varphi_1=-\frac{1}{z}\left(ay\mp\sqrt{(a^2y^2+2abxz)}\right)$$

$$\varphi_2=-a$$

Per la p e la r nella ottava, messivi i loro valori dati dalla sesta e settima, otteghiamo, risolvendone rispetto a q la trasformata

$$q=\frac{b(l\beta-ak)}{a\gamma}$$

E quindi tenendo conto di questo valore di q, e degli altri dati per p ed r, otteghiamo

$$p^2+q^2+r^2=k^2+l^2+\frac{b(ak-l\beta)^2}{2a^2\beta}$$

$$\beta p+\gamma q+\varepsilon r=al-k\beta-\frac{b(ak-l\beta)}{a};$$

ed anche sostituendo per γ^2 il suo valore $2b\beta$, e per ε il suo valore $-a$,

$$\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2=a^2+2b\beta+\beta^2$$

Sostituiti i valori di questi tre trinomii, nelle ultime due delle (CLIX), ottenghiamo in fine

$$\varphi_3=\sqrt{\left(k^2+l^2+\frac{b(ak-l\varphi)^2}{2a^2\varphi}-\frac{(a(al-k\varphi)-b(ak-l\varphi))^2}{a^2(a^2+2b\varphi+\varphi^2)}\right)}$$

$$\varphi_4=\left(1-\frac{a(al-k\varphi)-b(ak-l\varphi)}{a(a^2+2b\varphi+\varphi^2)}\right)\sqrt{(a^2+2b\varphi+\varphi^2)}$$

ove per φ dovrebbe in ultimo sostituirsi la determinata funzione effettiva ch' essa è delle x, y, z: e pertanto ne risulterebbero le funzioni esplicite che le φ_3, φ_4, sono delle x, y, z. E sostituite queste funzioni, ed eziandio le determinate $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ nella (CXLI), ottiensi la equazione dell' anulare particolare di che si tratta: e per analoghe sostituzioni nelle espressioni determinate negli Articoli precedenti, otterrebbonsi le equazioni della inviluppata rigata, della rigata a generatrici a quelle di questa normali, della caratteristica ec.

II.

180. Se fosse $a=b$, se cioè l' altezza del cono determinatore dell' anulare fosse uguale al parametro della sua base, risulterebbe in primo

$$\varphi=\frac{a}{2z^2}(y\mp\sqrt{y^2+2xz})^2$$

$$\varphi_1=-\frac{a}{z}(y\mp\sqrt{y^2+2xz})$$

$$\varphi_2=-a$$

E molto si semplificherebbero le forme delle funzioni φ_3, φ_4; perciocchè nella prima l' ultimo termine ch' è fratto acquisterebbe tanto nel numeratore, quanto nel denominatore il fattore $(a+\varphi)^2$, e nella seconda il termine fratto acquisterebbe sì nel numeratore, come nel denominatore il fattore $(a+\varphi)$; della qual cosa è anche più facile persuadersi, messa di fatto in esse funzioni invece di b la a. E pertanto risulterebbe

$$\varphi_3=\sqrt{\left(\frac{a^2k^2+l^2\varphi^2}{2a\varphi}\right)}$$
$$\varphi_4=a+k-l+\varphi.$$

E scorgeremo che nel caso di che si tratta la φ_4 è uguale alla medesima φ aggiunta alla quantità costante $a+k-l$.

181. Se fosse inoltre, non solo $a=b$, ma ancora $l=k$; se cioè la retta luogo dei centri della circonferenza mobile generatrice dell' anulare, fosse equidistante dai piani xy, zy, le φ, φ_1, φ_2, resterebbero le medesime, e sarebbero

$$\varphi_3=k\sqrt{\left(\frac{a^2+\varphi^2}{2a\varphi}\right)}$$
$$\varphi_4=a+\varphi.$$

E senza uopo di determinare di fatto la equazione dell' anulare, dalle sole forme delle funzioni φ_3, φ_4; o per meglio dire dal come queste sono composte dalla φ, ci accorgeremo che l' anulare anderà all' infinito; e che la sua ampiezza può variare dalla a sino all' infinito, perciocchè la φ potrebbe avere un valore *zero*, ed anche infinito.

CONCHIUSIONE.

182. Abbiamo veduto fin quì, come trovare le espressioni analitiche generali delle Anulari a Cono Direttore; e come dedurne quelle delle Anulari di Quinta, Sesta, e Settima Classe: e parimenti, come trovar quelle delle loro rispettive caratteristiche, delle loro inviluppate rigate, e delle rigate a generatrici normali a quelle delle inviluppate: ed abbiamo dimostrato ancora, come dedurne quelle di linee o superficie individuate di esse, tra quali sono la *Rigata Determinatrice* dell' anulare generale di ciascuna classe, la linea di contatto di questa colla sua rispettiva determinatrice, e per ciascuna anulare generale, la *Curva dei Centri* di tutte le circonferenze sue: e nel fare coteste ricerche, nella soluzione di molti problemi generalissimi ed anche importanti ci siamo imbattuti, che di per sè soli sono utilissimi alla parte della scienza geometrica, che va sotto il nome di geometria analitica: e molti teoremi o verità abbiamo appurato; e non solo pertinenti in ispezialtà alle anulari in generale, ma ancora ad altre superficie e linee. Ed è chiaro che se ulteriormente fossimo andati svolgendo le trovate formole od espressioni, e le trasformate loro fossimo andati interpetrando, molte altre verità, o teoremi generali in questo nostro lavoro avremmo potuto enunciare. Ma ciò non abbiam voluto; perciocchè a noi pare ciò converrebbe meglio a trattati speciali, che non a nuove ricerche come queste; per le quali, secondo ci eravamo proposti, volevamo solo osservare l' insieme di questo vasto campo; nel quale per i primi ci siamo inoltrati; e con iscopo principalissimo di trovare le principali *Espressioni* o formole, le quali potessero esse sole essere come il germe di ogni altro trattato sul soggetto, e che in esse le equazioni tutte comprendessero di *quante anulari a cono direttore sono generabili*, *da infiniti movimenti di circonferenza di circolo*, *con raggio variabile per infinite leggi*: ed anche riconoscere

e dimostrare i *teoremi fondamentali generali*, che l'indole mostrassero di ciascuna classe di anulari a cono direttore; e dai quali non solo corollarii molti potrebbonsi cavare; ma, quello che è più, che menano naturalmente alla classificazione delle anulari tutte di ciascuna delle tre classi a cono direttore, in *Gruppi*, *Generi*, *Specie*, e *Varietà*; perciocchè è nostra ferma opinione, che le forme della Geometria *debbano essere classificate* secondo la loro intrinseca natura, la quale *stà tutta nella genesi loro*; e non secondo apparente forma, non sempre da cotale genesi dipendente, di certi simboli atti bensì a rappresentare la superficie, quando convenientemente combinati tra loro, ma *non sempre* atti alla manifestazione *chiara*, *adequata*, ed *esclusiva* dei movimenti pei quali le linee che si muovono generano le stesse superficie, ovvero quelle medesime forme; e d'altronde non sapremmo comprendere perchè mentre tutte le scienze naturali classificano gli oggetti che sottopongono ad esame in classi, gruppi, generi, specie, famiglie, varietà e sottovarietà, secondo certe proprietà comuni, o requisiti di generi, la scienza geometrica non debba parimente classificare le forme ch'essa contempla.

Ci è bastato dunque spingere tanto innanzi le nostre ricerche da riuscire al detto scopo. Ma sendo che precipuo fine del nostro lavoro si era ancora di dare mezzo onde poter determinare le equazioni di qualunque anulare, comunque immaginabile generata, e delle dette linee, e superficie rigate con essa connesse, come quelle che sono indispensabili alla misura numerica dei volumi e delle aree dei solidi conformati secondo superficie anulari, o dei pezzi componenti essi medesimi solidi, e ciò per gli ulteriori calcoli di valutazione o di meccanica; perchè il lavoro avesse corrisposto al suo fine, o meglio a ciò che avea dato origine alle nostre ricerche sul soggetto, dovevamo dare norme generali per fin di cavare dalle trovate espressioni generalissime le equazioni tutte che in ciascuna di esse sono comprese, ossia come nascoste. E questo pure abbiam fatto.

Quelle espressioni si compongono o di funzioni arbitrarie, o di costanti e funzioni insieme arbitrarie, determinate le quali, cioè di valore le prime, e di forma le seconde, restano determinate da esse espressioni le dette equazioni; ed abbiamo, nell'Articolo Quinto

di ciascuno dei tre Capi precedenti, veduto come determinare le forme di esse funzioni arbitrarie, od i valori particolari di esse costanti arbitrarie, date certe linee o superficie nello spazio, le quali sono *determinatrici* della genesi di una particolare superficie anulare, od in vece la legge del movimento e del variare del raggio della circonferenza generatrice di essa.

Fatto tutto ciò, avremmo potuto chiudere le nostre ricerche. E pure per non fermarci nelle astrattezze, abbiamo voluto scendere a certi esempii della effettiva determinazione delle forme di esse funzioni, ed anche dei valori particolari di esse costanti; ossia della effettiva determinazione delle dette equazioni. Ed abbiamo assunti certi esempii facili bensì, ma che ci hanno menati a certe curiose ed importanti considerazioni, ed anche a certi singolarissimi risultamenti, *importanti non tanto per queste ricerche*, *quanto per certe novelle vedute che possono introdurre nella scienza delle matematiche pure*: e quindi a trattare in generale di certe Tribù Particolari di Anulari per le superficie componenti delle quali si verificherebbero quei medesimi singolarissimi risultamenti. Al Capo Secondo ci siamo occupati di parecchi di cotesti esempii. Avremmo potuto fare il medesimo al Capo Terzo, ed anche al Capo Quarto; ma quì siamo stati anche più ristretti che non nel Capo precedente, perocchè già molto ci eravamo allargati oltre i confini e lo scopo.

Però non passeremo oltre ad addurre nuovi esempii, i quali chi sà di quante importanti conseguenze non sarebbero fecondi, nè ci occuperemo in generale di famiglie di anulari pertinenti ad altre Tribù particolari, oltre quelle già contemplate all' Articolo Sesto del Capo Secondo. E chiudiamo queste nostre ricerche, essendo contenti di quel poco che abbiamo investigato intorno alle *Anulari a Cono Direttore*; e preferendo meglio di passare invece, coll' ajuto dell' Onnipotente Iddio; a far ricerche sulle anulari *delle altre quattro classi*, lasciando ad altri se il voglia addentrarsi nell' escogitazioni di altre anulari particolari di queste medesime classi, che hanno fatto l'oggetto delle Ricerche che nella presente Memoria abbiamo ordinate.

INDICE DELLE MATERIE

INTRODUZIONE

OVVERO

ARTICOLO 2.

Espressione di un punto della Caratteristica.

ARTICOLO 3.

Espressione della Inviluppata Rigata all' anulare generale di Quinta Classe.

ARTICOLO 4.

Espressione della Rigata a Generatrice Normale a quella della Inviluppata all' anulare generale di Quinta Classe.

ARTICOLO 6.

Applicazione delle cose esposte nei paragrafi precedenti.

ESEMPIO PRIMO.

ESEMPIO SECONDO.

ARTICOLO 4.

Espressione della Rigata a Generatrici Normali, ciascuna a ciascuna di quelle della inviluppata all' anulare generale di Sesta Classe.

ARTICOLO 5.

Dati i Determinanti dell' Anulare Particolare di Sesta Classe, determinarne la equazione: e determinarne quelle della sua caratteristica, della sua inviluppata, e della rigata a generatrici a quelle di questa normale.

ARTICOLO 1.

Espressione dell' Anulare generale di Settima Classe.

ARTICOLO 2.

Espressione della Caratteristica dell' anulare generale di Settima Classe.

ARTICOLO 3.

Espressione della Inviluppata Rigata all' anulare generale di Settima Classe.

ARTICOLO 6.

Applicazione delle cose esposte negli Articoli precedenti.

ESEMPIO PRIMO.

ESEMPIO SECONDO.

CONCHIUSIONE.

RAPPORTO ALL' ACCADEMIA

DELLA MEMORIA

DEL SOCIO V. ANTONIO ROSSI

INTITOLATA

RICERCHE ANALITICHE SULLE SUPERFICIE ANULARI

La Memoria del Socio sig. Rossi riguarda una famiglia numerosissima di superficie, non ancora sottoposte a calcolo. Si suppone infatti che intorno a un dato cono di base qualunque ruzzoli un piano tangente, e che sopra questo piano si muova nel tempo stesso un cerchio di raggio costante, o di raggio variabile secondo una data legge: quindi è manifesta la varietà grandissima delle superficie così generate dalla circonferenza mobile. L'autore le chiama *superficie anulari a cono direttore*, comunque non abbiano in generale veruna somiglianza alla figura dell' anello: egli à voluto in ciò imitare Hachette, che chiama *superficie rigate* quelle che nascono dal movimento di una linea retta, e sulle quali per ogni loro punto si può in conseguenza applicare il taglio di una riga.

Le superficie anulari sono riferite a tre assi rettangolari, aventi per origine il vertice del cono; ma il centro della circonferenza generatrice posta sul piano tangente è riferito immediatamente a due assi mobili con questo piano, che sono il lato di contatto di esso piano col cono direttore, ed una retta perpendicolare a tal lato tangente alla circonferenza; ma questa tangente potendo esser duplice, l'autore preferisce la più lontana dal vertice del cono.

Frattanto che la circonferenza mobile genera la superficie anulare, ciascun punto di essa descrive una curva che l'a. chiama *caratteristica* della superficie: questa voce fu la prima volta adoperata in un senso alquanto diverso dal celebre Monge, che trattando

della superficie generata dal movimento di un' altra superficie, chiamò *caratteristiche* della prima le intersecazioni successive della seconda , la quale al variare di posizione può altresì variare di forma.

L' a. considera pure la superficie rigata che viensi a generare dalla tangente della circonferenza mobile in un punto qualunque di questa , frattanto che il punto del contatto descrive la caratteristica; ed ancora la superficie rigata che si genera dalla retta in cui si trova il raggio perpendicolare alla tangente. Le generatrici di queste due superficie rigate essendo perpendicolari l' una all' altra , accade talvolta che sieno tali anche i lor piani tangenti ; ed allora le superficie possono essere utilmente adoperate in alcune arti , come ad esempio nella Stereotomia.

Tra le superficie rigate che si descrivono dalle tangenti alla circonferenza generatrice dell' anulare , l' autore considera in modo speciale quella descritta dalla summentovata tangente perpendicolare al lato di contatto del piano della circonferenza col cono direttore , e tal superficie rigata vien detta *determinatrice* dell' anulare, perchè l' a. dimostra che ogni sua retta basta a determinare di posizione e grandezza una circonferenza dell' anulare. Or questa medesima superficie rigata potendo essere *non isviluppabile* , *sviluppabile* con *lato di regresso* , e *sviluppabile conica* , l' a. considera in tre distinti capitoli le anulari corrispondenti a queste tre specie di superficie rigate determinatrici.

Così , dopo i preliminari contenuti nel primo capitolo , ed attinenti a tutte le anulari a cono direttore ed a rigate determinatrici, l' a. considera nel secondo capitolo le anulari a cono direttore , ed a rigata determinatrice non isviluppabile ; nel terzo discorre le anulari a cono direttore , ed a rigata determinatrice sviluppabile con lato di regresso ; e finalmente nel quarto tratta delle anulari a cono direttore , ed a rigata determinatrice sviluppabile conica. — Inoltre chiama di quinta classe le prime delle nominate anulari , di sesta classe le seconde , e di settima le ultime ; e ciò perchè in altra sua Memoria, dove considera le superficie anulari in tutta la loro generalità , queste superficie sono ripartite in undici estesissime classi. Ciascuna classe è poi divisa in *gruppi* , ciascun gruppo in *generi* ,

ciascun genere in *ispecie*, e ciascuna specie in *varietà*. E vi à pure le *sottovarietà*, le *tribù* e le *famiglie*, avendo l' a. voluto imitare (come dice sul finire della Memoria) ciò che fassi nelle scienze naturali.

Per le anulari di quinta classe l' anzidetta divisione si stabilisce dall' a., dopo aver egli dimostrato che l'espressione generale di tali anulari si può sempre ridurre a contenere quattro funzioni arbitrarie delle sue tre coordinate. E tra le anulari di quinta classe incontransi le superficie che Monge chiamò *superficie canali*, e che possono essere ad ampiezza costante, o ad ampiezza variabile.

Nel secondo capitolo dove trattasi, come abbiam detto, delle anulari di quinta classe, l'a. esamina la legge secondo la quale varia l' ordinata del punto in cui si tagliano le due rette mobili, alle quali è riferita la circonferenza generatrice dell' anulare, allorquando la superficie rigata determinatrice dell' anulare non è sviluppabile.

Parimente l' a. esamina fra l' altre cose nel terzo capitolo la legge che dee seguire nelle sue variazioni la detta ordinata, perchè la superficie rigata determinatrice risulti sviluppabile con lato di regresso. La quale disamina riesce più complicata, perchè la curva direttrice della superficie sviluppabile determinatrice non si può assumere ad arbitrio. L' espressione più generale delle anulari di sesta classe, considerate in questo terzo capitolo, contiene quattro funzioni arbitrarie delle coordinate, e due costanti arbitrarie. E dalla natura delle quattro funzioni desume l' a. la divisione delle anulari di detta classe in gruppi, generi, specie e varietà.

Il quarto ed ultimo capitolo della Memoria è come un caso particolare del terzo, del pari che una superficie sviluppabile conica dee riputarsi un caso particolare della superficie sviluppabile con lato di regresso. Quindi, dopo le cose ragionate dall'a. nel terzo capitolo, gli riesce facile di considerare e discutere nel primo articolo del capo quarto le anulari della settima classe; nel secondo articolo le caratteristiche di esse; nel terzo le *inviluppate rigate*, descritte dalle tangenti della circonferenza generatrice dell' anulare; e finalmente nel quarto le superficie rigate normali alle dette invi-

luppate. L' equazione più generale delle anulari di settima classe presenta quattro grandezze arbitrarie, tre delle quali son funzioni arbitrarie delle coordinate, e la quarta può essere funzione arbitraria o costante arbitraria. E di quì ancora desume l'a. la solita divisione di tali anulari della settima classe in gruppi, generi, specie e varietà.

Le ricerche delle quali abbiamo dato un estratto, molto in vero succinto, sono a un dipresso del medesimo genere di quello che ci à lasciate il celebre Monge nella sua *Applicazione dell' Analisi alla Geometria*. Le medesime hanno un grande interesse, quando sceverate dalle specialità inerenti ai singoli esempi, offrono alcun che di generale, o almeno di spettante a forme di equazioni non del tutto particolari; perocchè queste equazioni essendo o potendo essere a *differenze parziali*, la conoscenza delle superficie da esse rappresentate può concorrere efficacemente al perfezionamento di quella parte di Calcolo integrale che riguarda l' *integrazione dell'equazioni a differenze parziali*, integrazione che costituisce la maggiore e forse la sola difficoltà che s' incontra nelle più ardue quistioni di matematiche applicate. Il sig. Rossi, al quale si debbono tali ricerche, debb' essere meglio che altri a portata di desumere dalle medesime quell' utile che se ne può attendere; ma in ogni modo la pubblicazione della sua Memoria potendo essere di stimolo anche ad altri di correre lo stesso aringo, avvisiamo alla utilità d' inserirla negli Atti dell' Accademia, per estratto almeno se non per intero, siccome stimerà meglio il Consiglio di Amministrazione insieme con l' autore, i cui dotti ed eleganti lavori saranno sempre di decoro agli atti Pontaniani.

Napoli 14 Settembre 1849.

Fedele Amante
Francesco Paolo Tucci relatore.

Avendo la classe approvato che la memoria fosse inserita negli Atti, l'Accademia nell'adottarne il parere volle che si stampasse la suddetta relazione in seguito della memoria.

INDICE

DEL PRESENTE FASCICOLO

Prezzo del presente fascicolo . . . . . ♉ 1, 50

ATTI

DELL'ACCADEMIA PONTANIANA

FASCICOLO III DEL VOLUME VI

AVVISO

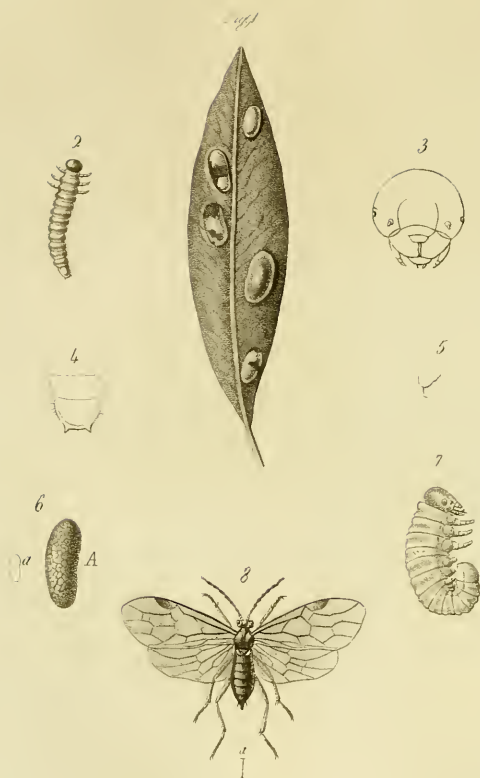
L'accademia Pontaniana pubblica i suoi atti in fascicoli, affinchè possano sollecitamente conoscersi le memorie a misura che sono approvate.

Ogni fascicolo si pubblica subito che si ha sufficiente materiale e senza astringersi ad alcun determinato periodo o numero di fogli.

Terminati i fascicoli che debbono comporre un volume, si dà il frontespizio, la dedica, la storia de' lavori, ed il catalogo degli accademici da premettersi al volume medesimo.

NAPOLI
DA' TORCHI DEL TRAMATER
1852

Pag. 281.

Calejo dis — A. Russo inc.

STORIA DELLA TENTREDINE

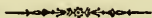
PRODUTTRICE DELLE GALLE DELLE FOGLIE DEL SALCIO

(*Salix Russelliana*)

MEMORIA

letta all' Accademia nella tornata de' 26 agosto 1849

DAL SOCIO RESIDENTE

Achille Costa

Non vi à forse regione di Europa, nella quale allignando il Salcio Russelliano (*Salix Russelliana*), le sue foglie non vengano alterate da una particolare spezie di galla, occasionata da un insettolino della famiglia delle Tentredini. Una tal circostanza è ben sufficiente a far preintendere, come tali morbose produzioni, al pari del maggior numero delle altre galle, ignote non siano rimaste a coloro, che in tempi da noi assai lontani, de' fatti della Natura si son mostrati vaghi indagatori. Non son mancati in effetti nel secolo passato, e nell' altro ancor precedente, Naturalisti i quali siansi occupati a studiare la genesi di tali galle del Salcio indicato, e seguire le metamorfosi dell' insetto che le occasiona. E ben ci gode l' animo di poter dire, che primi a portare il loro studio su questo argomento sono stati due illustri italiani del secolo decimoset-

timo, il Redi ed il Vallisnieri, ai quali poscia è succeduto nel secolo appresso il Reaumur nella Francia. Il primo di essi, benchè avesse ogni cura impiegata in educarne le larve, nulladimeno non fu sì fortunato da ottenerne l'insetto perfetto, che perciò rimasegli ignoto. Il secondo a ciò pervenne. Il terzo sviluppò più ampiamente la genesi della galla, ed il progresso delle metamorfosi dell'insetto. Egli ce ne à lasciata la storia in una memoria, nella quale discorre delle galle delle piante e degli alberi, e delle produzioni che loro sono analoghe, e degli insetti che ne occasionano la formazione e l'accrescimento (1). La quale storia, come tutti i lavori di questo dotto ed accurato osservatore, porta l'impronta della sua esattezza e scrupolosità nello studiare i fatti della Natura. Nulladimeno, qualche principio vi è stabilito con certo assolutismo, dal quale siegue ch'egli attribuisce a poca avvedutezza e preveggenza del Redi il non esser pervenuto ad ottener l'insetto perfetto; mentre nel fatto non sta, siccome dalle nostre ricerche risulta. Innoltre, nè i due nostri italiani, nè il Reaumur, ci àn lasciata una esatta e minuta descrizione dell'insetto perfetto. Nè ciò ci reca alcuna meraviglia, chè anzi strano sarebbe stato pretender l'inverso, i costumi degli insetti avendo formato il principale scopo di tali osservatori, non già la loro sistematica classificazione. Non è però a dir lo stesso del non veder fra più recenti scrittori di tali materie, nè fra gli stessi monografisti, alcuno il quale di questa Tentredine avesse fatto parola. Per tali ragioni noi stimammo non vano portar pure le nostre ricerche sull'argomento in questione, ripetere le altrui sperienze, sia per bandire

(1) Reaumur, Memoires vol. III, mem. IX.

qualche inesattezza, sia per completarne la storia con la illustrazione dell' insetto perfetto. Lo studio del quale ci à presentati tali caratteri, come faremo a suo luogo avvertire, da non permetterci di poterlo registrare in alcuno de' già stabiliti generi.

§. I. *Storia della genesi della galla, e delle metamorfosi dell' insetto.*

In tutte quasi le stagioni dell' anno, osservando la indicata specie di Salcio vedesi un numero maggiore o minore delle sue foglie alterate da una sorta di galle, di figura ovato-allungata, convesse e sporgenti egualmente dall' una e l' altra pagina della foglia, dal cui piano sembra restassero orizzontalmente ripartite in due eguali metà, aventi nel massimo sviluppo linee quattro e mezzo nel diametro maggiore, due o poco più nel minore, quanto è pure presso a poco l' altezza o grossezza, presentandosi il loro taglio trasversale quasi circolare. Quale forma e grandezza però non sono sì costanti, da non trovarne fra un considerabile numero, di quelle più o men ritondate, o che toccata la medesima crescenza non offrissero le dimensioni indicate, bensì minori, quasi il loro sviluppo non avesse avuto un regolare processo. Di un verde simile a quello della pagina superiore della foglia nella prima loro età, cominciano in seguito a colorirsi d'un bel rosso scarlatto, il qual colore d' ordinario partendo dal centro o parte più convessa dell' una e l' altra metà della galla, si va quindi successivamente espandendo verso la periferia, sicchè quando sono al lor termine si presentano interamente così colorite, facendo un contrapposto grazioso col

color verde delle foglie, dalle quali pria non distinguevansi punto. In altre il colore scarlatto si limita quà e là, formando delle chiazze irregolari in figura, quasi costanti in estensione. Non vi à sito della foglia che non ne possa essere affetto: sviluppansi del pari presso il nervo principale, presso i margini e nel rimanente del campo. Molte foglie non ne presentano che una sola per cadauna; facile è però incontrarne di quelle, che ne hanno due, tre, quattro ed anche talvolta cinque o più, sia tutte l'una dall'altra distanti, sia alcune fra loro ravvicinate.

Dissecandosi accuratamente ne' diversi sensi, e ne' diversi periodi di sviluppo, vedesi chiaramente risultar tali galle da' due strati della foglia, i quali si separano, si divaricano elevandosi ciascuno dal proprio lato a guisa di ampolla, restando fra loro una cavità, in un modo analogo a quelle che generansi sulle foglie del *Vitex agnus castus*, che perciò Reaumur riunì insieme, col nome di galle *varicose*. Il qual processo è accompagnato da un trasformamento ancor del tessuto, il quale per l'effetto di un maggiore afflusso di umori nutritivi s'ingrossa, diviene un parenchima crasso, compatto, poco spugnoso. In fatto però di trasformamenti di tessuto che àn luogo nella formazion delle galle, queste del Salcio si allontanano meno che altre dallo stato fisiologico. Poichè laddove in talune il tessuto si trasforma immensamente, divenendo fibroso e perfino legnoso, come nelle galle delle tintorie, in queste scorgesi niente più che una crassezza maggiore del tessuto stesso della foglia, la cui epidermide continuasi chiaramente sulla galla. Ed anche quando son presso a seccare, dalla parte più convessa e centrale, ove il tessuto è più mutato, andando verso la periferia scorgesi il graduato passaggio al tessuto normale della foglia.

Produttore, o se così dir si voglia, causa di queste galle è un insettolino a quattro ali, dell'ordine degli Imenotteri, famiglia delle Tentredini. Tali insetti appariscono in primavera, venendo fuora da' bozzoli delle galle del preceduto autunno, variandone la precisa epoca a norma de' luoghi più o meno caldi, che ne rendono precoce o ritardato lo sviluppo. Nelle contrade più calde ciò avviene nel finire del marzo o principiar dell'aprile, secondo l'andamento delle stagioni; nelle altre, come sulla collina de' Camaldoli prossima alla capitale, ove specialmente abbiam potuto seguire senza interruzione tali ricerche, accader suole negli ultimi giorni di aprile o primi di maggio. Compiuto il principale scopo, l'accoppiamento, cui la Natura li chiama in quest'ultimo stadio di lor vita, che à durata di sol pochi giorni; la femmina già fecondata attende alla sua finale deputazione, quella di assicurar la propagazion della specie. Si aggira quindi intorno le foglie dell'albero, ove menò sua prima vita, e munita, al pari di tutte le altre Tentredini, di una trivella composta di quattro laminette, di cui le due medie aguzze e dentellate a guisa di sega nell'inferior margine, per mezzo di queste, a tal uopo dalla Natura concessegli, perfora una parte della spessezza della foglia, penetra fra i due suoi strati, e vi depone un uovo. La stessa operazione essa va ripetendo sopra foglie diverse, e sopra più punti di una medesima foglia, tante volte per quante sono le uova di cui deve sgravarsi, non deponendole per gruppi, bensì l'uno isolato dall'altro; e ciò per effetto di quello ammirabile istinto, per lo quale tutti preveggono i bisogni della nascitura lor prole, come sarà chiaro da ciò che in appresso diremo. Non appena ciò avvenuto, per lo stimolo cagionato sulla foglia dalla punzec-

chiatura fattavi con la trivella, e sostenuto dalla presenza del corpo straniero, l'uovo, un aumento di vegetazione si stabilisce in quel punto, onde il tessuto diviene più crasso e tumido, dando origine alla galla. Questa inviluppa d'ogni parte l'uovo, che vi rimane rinchiuso al di dentro, senza avvertirsi più traccia o cicatrice della ferita prodotta dall'organo perforatore dell'insetto. Sezionata la galla allorchè non à più d'una linea nel maggiore diametro, trovasi tutta egualmente d'un parenchima compatto verde, che lascia nel centro una piccolissima cavità, nella quale giace l'uovo, pressochè sferico, e di colore bianchiccio, onde si fa immantinenti avvertire, spezialmente se facciasi uso di qualche lente d'ingrandimento. Ripetendo le ricerche medesime a più innoltrato sviluppo, e quando non è ancora mutato il primitivo color della galla, rinviensi entro di questa il vermicciattolo o larva venuta già fuori, a corpo allungato e mollicino, meno il capo che è corneo, di un verdiccio pallido, sul quale soltanto risaltano gli occhi oscuri. Essa va rosicchiando l'interno parenchima della galla, sopperendo così a' bisogni della nutrizione ad un tempo, ed ingrandendo la cavità che dar deve ricovero al suo corpo crescente. È poco irritabile, talchè aperta la galla e venuta in aperto a contatto degli agenti esterni, lungi dal turbarsi, rimanesi al suo sito, continuando a roder la galla, prestandosi in tal modo assai bene alle indagini dell'osservatore. Allorchè è giunta alla sua massima crescenza si trova aver già consumato tutto l'interno parenchima della galla, la quale rimane a pareti più o meno sottili e disseccate, soprattutto nella parte più convessa centrale, e scavata da una maggior cavità, nella quale, aprendola, si trova da un lato la larva lunga già due linee all'incirca,

di color acqua marina col capo piceo, dall'altra parte il mucchio degli escrementi da essa deposti durante tutto il tempo di sua crescenza. E quì dobbiam ricordare ciò che poco innanzi accennammo, che l'abitudine della madre di deporre le uova l'uno dall'altro distanti e staccati era una prova di quello istinto onde per mille modi si rendono tali insetti oggetto della nostra ammirazione. Di fatti, essendo, come abbiam detto, la grandezza della galla tale, che tutto il suo interno parenchima è sol sufficiente ad alimentare una larva; se la madre più uova in un punto ponesse, le quali in conseguenza restassero in una galla stessa rinchiuse, le larve che ne verrebbero a schiudere non troverebbero sufficiente alimento. Nè la galla prender potrebbe un volume maggiore, essendo la sua crescenza proporzionata allo stimolo che l'à occasionata.

La larva pervenuta al suo completo sviluppo, che avvenir suole ne' primi giorni di giugno (1), intende a tessersi il bozzoletto, come è costume degl'insetti di tal famiglia, entro il quale passar deve il secondo periodo di sua vita, quello di ninfa. A ciò fare non tutte serbano eguale procedimento. Il maggior numero in tale epoca perfora le pareti della galla in un punto qualunque della sua superficie, e più spesso verso la periferia, l'abbandona, cerca il terreno, ed ivi a poca profondità si tesse un bozzolo cilindraceo, di color fulvo rossigno. Altre al contrario, lungi dallo abbandonare la galla, vi rimangono dentro, tessendosi ivi medesimo il bozzolo. Di talchè, visitando le galle quando già l'epoca di questa trasformazione è passata, le più si trovano bucate, e vuote all'interno, le altre intere e con entro il bozzolo già for-

(1) Ricordiamo tali epoche riferirsi alle osservazioni fatte sulla collina de' Camaldoli.

mato. E poichè abbiamo avvertito che la madre non depone più che un uovo per parte, così del pari un solo bozzolo per galla rattrovasi. Un solo esempio abbiamo osservato di galla avente allo interno due bozzoli della ordinaria grandezza, adattati obbliquamente l'uno accanto all'altro: lo che non sapremmo se dipeso fosse da uova insieme deposte dalla madre in un medesimo punto, o da larva che abbandonata la propria galla, per cagione qualunque, fosse andata a cercare alimento in altra già abitata, compiendo ivi ancora la sua trasformazione.

Per meglio seguire lo sviluppo e le abitudini dell'insetto, oltre alle dirette osservazioni, noi abbiam voluto ripetere le altrui esperienze, educando le larve nel proprio gabinetto. Raccolte quindi a debito tempo buon numero di foglie con galle innoltrate nello sviluppo, le abbiam sottoposte alla nostra non interrotta ispezione, mettendone altre in un vaso con della terra nel fondo, altre in vaso di questa mancante. Benchè le foglie fossero andate man mano disseccandosi, le galle tuttavia si son mantenute in tale stato, da non impedire la crescenza compiuta della larva. Sicchè giunta l'epoca della trasformazione, questa è regolarmente seguita. Ed abbiamo per tal modo osservato non solo che costantemente ci àn di quelle le quali non abbandonano la galla per trasformarsi, ma ancora che quelle che vennero fuori nel vaso in cui la terra mancava, tessettero il bozzolo o tra foglia e foglia, o tra foglia e le pareti del recipiente; e quelle del vaso con terra altre penetrarono in questa per trasformarsi, altre rimasero del pari tra le foglie a tessere il bozzolo. Dalle quali cose potemmo conchiudere due fatti. Il primo, esser costante il trasformarsi di alcune larve nell'interno della galla. Su di che rimar-

rebbe solo ad intendere, se fosse ciò dovuto a pura elezione, od a qualche speciale cagione. Potrebbe ad esempio questa riporsi in uno stato morboso della larva per lo quale le mancasse la forza a perforare le pareti della galla, senza che però il suo sviluppo venisse meno, da non convertirsi in insetto perfetto. Il secondo è, che rimanendo vera la naturale tendenza delle larve di cercar la terra per trasformarsi allorchè abbandonano le galle, questa nondimeno non è necessaria per modo, che la sua mancanza impedisca che la larva tessa altrove il suo bozzolo; fatto che noi abbiamo sperimentato ancora in varie altre specie di Tentredini, le quali per naturali abitudini perfettamente a questa delle galle del Salcio simigliano. Ed è questo appunto che alle investigazioni del Reaumur dovette sfuggire. Dappoichè egli attribuisce alla mancanza di terra nel fondo del vaso il non aver il Redi ottenuto l'insetto perfetto, mentre a ciò pervenne il Vallisnieri che ebbe tal preveggenza.

Sia qualunque il sito che la larva presceglie a tessere il suo bozzolo, uno a due giorni impiega a tal lavorio. Essa vi si rinchiude al di dentro rannicchiata e contratta, vi giace distesa, col capo incurvato verso il petto e gli ultimi anelli addominali rivolti in avanti contro i precedenti per la faccia ventrale. Ed in tal posizione, senza punto mutar abito o forma, rimane per circa una ventina di giorni, quando avvicinatasi l'epoca della seconda trasformazione, depone l'ultima sua spoglia per prender la vera sembianza di ninfa, dalla quale dopo qualche giorno passa ad immagine. Se il bozzolo è tessuto allo esterno, l'insetto perfetto non à che ad attraversar questo, lo che gli è molto agevole: se è rimasto entro la galla, sbrigatosi dal

primo impaccio, deve perforare le pareti del suo ricettacolo, compiendo ciò che non fece allorchè era larva.

Sicchè negli ultimi giorni di giugno, od al più tardi ne' primi di luglio, gl' insetti perfetti son fuori. Questi ripetendo le operazioni medesime delle lor madri, danno origine a nuove galle, le cui larve, tessutosi il bozzolo, rimangono entro di esso custodite per tutta la stagione autunnale ed invernale, schiudendo nella primavera dell'anno seguente.

§. II. *Descrizione dell' insetto ne' diversi suoi stati.*

Larva — Corpo allungato, quasi cilindraceo, poco più ristretto posteriormente, composto di quattordici anelli, il cefalico, i tre toracici, e i dieci addominali; il primo corneo, i rimanenti molli.

L' anello cefalico o capo è ritondato, appiattito in avanti e quasi verticale, con una linea impressa archeggiata a guisa di ferro di cavallo, con l' arco in sopra e le branche in sotto terminate agli angoli dell' epistoma, che è limitato da una simile linea diritta trasversale impressa, la quale sembra la corda dell' arco indicato. Il labbro superiore è coriaceo, nella base largo pressochè il doppio che lungo nel mezzo, ritondato negli angoli anteriori. Le mandibole sono robuste, cornee, ad estremità larga e troncata, con due denti, il superiore de' quali più lungo, e due angoli sporgenti più sopra di questo. Le mascelle son piccole poco coriacee, con palpi di cinque articoli, il primo de' quali maggiore degli altri quattro presi insieme: questi decrescenti ancora in grandezza, l' ultimo essendo piccolissimo ed acuminato. Il labbro inferiore è carnoso,

con due piccoli palpi di tre articoli , decrescenti in grandezza, l' ultimo consistendo in una minuta punta. Gli occhi , semplici , sono assai piccoli e laterali. Le antenne, rappresentate da un solo articolo conico-troncato, sono inserite in una poco profonda fossetta , posta sopra ad infuori degli angoli basilari dell' epistoma.

Gli anelli toracici , quasi eguali fra loro , il primo essendo solo un poco più corto, ànno ciascuno nella faccia dorsale due cordoni trasversali costituiti da pieghe della cute , ivi più ispessita e quasi callosa.

I primi nove anelli addominali sono simili ed eguali ai toracici ; il decimo od ultimo à la faccia dorsale poco convessa , quasi a forma di scudo, posteriormente più angusto e ritondato , sotto del quale apresi l' ano.

I piedi veri, di che van forniti gli anelli toracici, sono mediocremente robusti, di quattro articoli decrescenti gradatamente in grandezza , l' ultimo de' quali terminato da unghietta aguzza ma poco inarcata. Il primo anello addominale presenta al disotto due piccoli tubercoli mammelliformi ; i sei seguenti , dal secondo cioè al settimo inclusivo, portano ciascuno un pajo di falsi piedi, carnosi, in parte retrattili , ed armati come all' ordinario di minuti uncinetti ; l' ottavo manca d' ogni sorta d' appendici ambulatorie ; il decimo à due falsi piedi maggiori, anch'essi carnosi ma più consistenti , acetaboliformi , coi quali più fortemente aderisce ai corpi sui quali poggia o cammina. Innoltre, ne' sei anelli forniti di falsi piedi (secondo a settimo) vedesi nel mezzo fra i due piedi una rima prodotta da introflessione de' comuni tegumenti , dalla quale , comprimendo gli anelli dai lati , vien fuori svolgendosi come un dito di guanto un organo speciale allungato , a pareti

membranose, simile a quello di molte altre Tentredini, ed analogo all' altro che manda fuori dal dorso del primo anello toracico la larva del Papilione Macaone.

Il color della larva nella sua prima età è un verde bottiglia assai chiaro tutto uniforme, quasi trasparente, coi soli occhi oscuri. Nella età adulta prende il color acquamarina, senza però perdere la trasparenza quasi cristallina; il capo con le mandibole si fa piceo, divenendo sempre più oscuro, e lasciando un poco del primitivo colore presso la impressione frontale.

La sua lunghezza nel massimo sviluppo è di linee due, o poco più.

Ninfa — La ninfa ritiene le forme di larva fino a qualche giorno soltanto pria che debba convertirsi in insetto perfetto: giace entro il bozzolo col corpo disteso, il capo incurvato verso il petto, e la posterior parte dell'addome inarcata e rivolta contra gli anelli precedenti, ai quali si adatta per la faccia ventrale. Il suo colore è bianco sporco tendente appena al gialliccio, col capo bruno.

Il bozzolo è cilindraceo, ritondato egualmente ne'due estremi, leggermente, ed in modo talvolta appena sensibile, strangolato per traverso nel mezzo; di color fulvo-rossiccio. Il tessuto onde vien formato è fitto ed alquanto grossolano. La sua lunghezza negl' individui meglio sviluppati è di circa due linee, una linea scarsa il diametro della grossezza.

Insetto perfetto — Capo breve trasversale, della larghezza del torace; levigato.

Antenne setacee-filiformi, lunghe quanto i due terzi di tutto il corpo; composte di dieci articoli: il primo assai breve e più grosso di tutti; il secondo più corto an-

cora del primo e nodiforme ; i rimanenti cilindracci e decrescenti gradatamente in lunghezza.

Torace quasi egualmente lungo che largo, un po ristretto anteriormente, superiormente convesso, a superficie levigata, con due impressioni una da ciascun lato.

Addome un poco più lungo del capo e torace insieme , poco dilatato dalla base fino al terzo anteriore, indi gradatamente ristretto.

Ali proporzionalmente grandi ; le anteriori con una cellula radiale pressochè ellittica, che raggiunge quasi l' estremità dell' ala ; quattro cellule cubitali, di cui la prima e terza piccole e quasi quadrate, la seconda quasi rettangolare , lunga il doppio che larga, eguale quasi alla prima e terza unite insieme ; la quarta maggiore di tutte, limitata dal margine dell' ala. La seconda riceve le due nervosità ricorrenti.

Piedi piuttosto lunghi e gracili.

Colori. Corpo interamente nero : piedi giallo - pallidi, i posteriori con l' estremità della tibia ed i tarsi oscuri : le anche di tutti i piedi nere, quelle de' posteriori gialliece all' estremità. Parti della bocca di color giallo sporco. Ali bianche, trasparenti, riflettenti i colori dell' iride ; con le nervosità brune, e lo stimma bruno dal lato esterno , pallido dall' interno : squama omerale gialliccia. Due punti callosi bianchi sul metatorace. Lembo posteriore de' due ultimi anelli addominali talvolta anche bianchiccio.

Osservazioni. Non riconoscendo questa Tentredine fra le specie descritte dagli autori, nè potendola registrare fra noti generi , vediamo la necessità di stabilirne uno nuovo, al quale imponiamo il nome di *Pontania,* per ricordare il nome dell' illustre Pontano, chiamando *gallicola* la specie.

Caratteri del genere.

Antennae setaceo-filiformes, 10-articulatae.

Alae anticae cellula radiali unica, cubitalibus quatuor, secunda duos nervos recurrentes recipiente.

Fra i generi noti quello cui maggiormente si ravvicina per le sue affinità naturali, come l'abito del corpo, la cellula radiale unica, le cubitali al numero di quattro, di cui la seconda riceve i due nervi ricorrenti, è il genere *Nematus*. Le antenne però mentre per la lor forma e lunghezza pur a quelle de' Nemati simigliano, presentano un importante carattere per lo quale nè a quello, nè agli altri vicini può la nostra specie ascriversi. Tutte in effetti le Tentredini di tali generi ànno le antenne composte di nove soli articoli, mentrecchè nella nostra se ne contano dieci. Ed è innoltre questo il primo esempio di antenne di dieci articoli nelle Tentredini: contandosene in tutte le altre o nove, o da undici inclusivo in sopra.

Caratteri della specie.

P. nigra nitida, ore squamula pedibusque pallide flavescentibus, tarsis posticis fuscis; alis hyalinis iridizantibus, nervis fuscis, stigmate fusco pallidoque. Long. corp. lin. 1 3/4.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. Una foglia di Salcio con varie galle in diverso grado di sviluppo, a grandezze naturali.

Fig. 2. La larva ingrandita.

Fig. 3. Il capo della stessa veduto di fronte, maggiormente ingrandito.

Fig. 4. Gli ultimi due anelli addominali della stessa.

Fig. 5. L'ultimo articolo de' piedi toracici con la propria unghietta.

Fig. 6. Il bozzolo; *a* grandezza naturale a semplici contorni, *A* ingrandito per vederne il tessuto.

Fig. 7. La ninfa quale giace entro del bozzolo, assai ingrandita.

Fig. 8. L'insetto perfetto molto ingrandito: *a* linea indicante la lunghezza naturale del corpo.

DELL' ERBA BACCARA

DEGLI ANTICHI

MEMORIA

letta all' Accademia nella tornata de' 18 Gennaro 1852

DAL SOCIO RESIDENTE

Cav. Michele Tenore

Sono già parecchi anni dacchè l' occasione se ne offriva di studiare il bel comento sulle piante mentovate nelle opere di Virgilio, dato in luce dal professore Fèe di Strasburgo col nome di *Flora Virgiliana* (1). Ne avveniva allora di sottoporre all' illustre autore talune nostre osservazioni ch' egli accoglieva con singolar cortesia. Partivano esse principalmente dalla conoscenza di alcune piante delle stesse contrade dove quel sommo Poeta dettava quasi la totalità de' suoi versi, e che da noi più facilmente che dagli oltramontani scrittori avran potuto studiarsi. Così, per esempio, ne avveniva di far riflettere come non avrebbe potuto riferirsi alla stessa pianta il *Cucumis* virgiliano mentovato ne' seguenti versi; cioè quello della Georgica;

> . . . . *tortusque per herbam*
> *Cresceret in ventrem Cucumis*
> Georg. IV. v. 23.

(1) Flore de Virgile, par A. L. A. Fée. Paris 1822. (Fa seguito al Virgilio della collezione de' classici latini del sig. Lemaire).

e l' altro del Copa

Et pendens junco caeruleis Cucumis
Copa v. 22.

Perocchè il *Cucumis* del primo luogo va ben riferito al *Cucumis sativus*, ossia al nostro *Citriuolo* comune, laddove quello dell'altro, dovendosi riferire al *Melone vernino*, che sospender veggiamo alle nostre finestre, si appartiene di certo al *Cucumis Melo*.

Queste ed altre simili avvertenze furono da noi allora date fuora per chiarire alcuni equivoci corsi in quell'eruditissimo libro, nè altra occasione se ne offriva dipoi di occuparci della Flora virgiliana (1). Egli è stato soltanto negli ozi della passata villeggiatura che per l' analogìa della dimora togliendo diletto dalla lettura del *Trattato della Villa* del nostro Giambatista della Porta, abbiamo trovato poter ritornare su qualche pianta virgiliana. Ciò avveniva perchè nel capo 40.° del libro IX di detta opera, trattando il Porta della Baccara di Dioscoride e di Virgilio, nuovamente richiamava la nostra attenzione su tal soggetto che di volo toccato avevamo nelle cennate nostre osservazioni.

Esordisce il Poeta nel citato luogo dal riferire un verso di Virgilio nel quale è nominata la *Baccara*.

. . . . *Baccare frontem*
Cingite, ne vati noceat mala lingua futuro.
Eclog. VII. v. 27.

Discorre quindi il lodato scrittore le qualità della Baccara, ch' egli trascrive dalle opere di Dioscoride e di Pli-

(1) Osservazioni sulla Flora Virgiliana. Napoli 1822.

nio, e di quegli stessi autori riporta la descrizione della pianta: notando specialmente che le radici di essa sono simili a quelle dell' Elleboro nero, e fornite di odor di cannella. Parlando infine, de' luoghi dove si trova, accenna di averla veduta crescere copiosamente nelle vicinanze del Garigliano: *Nos apud Gariliani fluvii pontem, via qua Romam itur, copiosissime fruticare vidimus.* Di questa sua pianta del Garigliano soggiunse il Porta le altre seguenti caratteristiche: *Erat enim foliis asperis veluti lanuginosis, subrubenti caule, radice caryophyllatae modo, odorem halante praestantissimi et suavissimi cinnamomi.* Ed ecco come a tal lettura ne tornasse in mente ciò che scriveva il Fèe intorno alla Baccara di Virgilio, adottando egli l'opinione che faceva riferirla alla *Digitalis purpurea.* Era facile rammentare allora che nè la pianta di Dioscoride, nè quella del Porta riferir si potessero a questa Digitale, sì perchè le radici di essa non hanno neppure la più lontana somiglianza con quelle dell' Elleboro, ed anche più perchè le qualità della radice della Baccara, delle quali il maggior caso han fatto quegli antichi scrittori, neppur per ombra rinvenir si potrebbero in quelle della *digitale purpurea.* Si veniva dipoi considerando la circostanza di non vedersi allignare questa pianta nè presso il Garigliano nè in verun' altro luogo del nostro regno non solo, ma il doversi ritener estranea al suolo di tutta Italia; perocchè comunque il Seguier ed il Pollini sulla fede del Calceolario la noverassero tra le piante del monte Baldo, ed il Biroli asserisse di averla raccolta sulle rupi di *Cima mullèra* nella provincia di Novara, tuttavia il chiarissimo prof. Bertoloni, poca fede prestando a tali deboli testimonianze, e non avendo potuto procacciarsele da verun luogo d' I-

talia, non ha esitato ad escluderla dalla sua *Flora italiana*. Del resto quando anche ammetter si volessero i due succennati *habitat* della *digitale purpurea*, non sarebbe meno strano il supporre che Virgilio avesse messo in bocca ai pastori della meriggia Italia una pianta che cercar dovessero sulle vette del Monte Baldo, o sulle rupi di Cima Mullèra!

Dippiù convien riflettere che Virgilio nell'associare la sua *Baccara* all'Edera ha dimostrato apertamente non doversi ritenere qual pianta da intesserne corone collo scopo di onorarne i poeti, cui veniva destinata l'Edera, ma bensì quello di preservarne da i maligni influssi del fascino; che perciò bastava soltanto cingerne la fronte, impiegandovi piccoli tralci o anche poche foglie infilzate a foggia di amuleti. Egli usa perciò la voce *ornare* per l'Edera, e quella di *cingite* per la Baccara.

Eccone gl'interi versi:

> T. Pastores HEDERA crescentem ornate poetam,
> Arcades, invidia rumpantur ut ilia Codro;
> Aut, si ultra placitum laudarit, BACCARE frontem
> Cingite, ne vati noceat mala lingua futuro.
> Ecl. *l. c.*

Rinunziando dunque all'idea che la Baccara di Virgilio riferir si possa alla *Digitalis purpurea*, di che lo stesso sig. Fée in altro luogo ha in diffinitivo conosciuta l'incoerenza; il pensiero tosto ne sorge di voler conoscere a quale altra pianta potesse la suddetta Baccara riferirsi; che perciò in primo luogo ci siamo avvisati dover ricercare se una sola pianta, e sempre la stessa fosse la Baccara degli antichi; ovvero se, sotto tal nome, avessero

eglino comprese piante diverse. Noi ne abbiamo trovato bentosto la dichiarazione consultando il *Pinax* di Gaspare Bauhin, meritamente decorato della epigrafe di *opus quadraginta annorum.*

In questo aureo libro se ne veggono registrate le quattro seguenti specie.

Specie 1.ª Asarum BACCHARIS, sive Baccatus Lob. Adv. ic. Pinax p. 197.

Specie 2.ª Aster atticus Pinax p. 266.

2. Aster atticus foliis circa florem mollibus BACCHARIS, vel Carpesium alpinum Columne.

Specie 3.ª Aster atticus. Pin. ibid.

3. Aster luteus, radice odora, Baccharis vera Dioscoridis. Baccharis vel πανχαρις Lob. Advers. 245.

Specie 4.ª Conyza Pinax pag. 265.

6. Conyza major vulgaris. Bauh. Matth. Lobel. Tabernam. Baccharis monspeliensium Gesner. Hort. (excl. Lob. Adv. p. 245).

Nelle classificazioni scientifiche adottate da tutt' i botanici, la prima di queste quattro *Baccharis* è attribuita all' *Asarum europaeum ;* la seconda al *Carpesium cernuum* ; la terza all' *Inula odora*, la quarta alla *Conyza squarrosa.*

In quanto alla prima specie il sig. Fée rimprovera gli espositori di Teofrasto e di Dioscoride per aver confuso l' Asaro colla Baccara, e quindi fermasi a fare il confronto delle descrizioni delle due piante. Noi frattanto faremo avvertire ch' egli avrebbe ragione di chiamare *gros-*

solano errore il ritenere quella Baccara identica all'Asaro, quante volte realmente riferir si volesse l' Asaro alla Baccara di Dioscoride ; ma qui non si tratta punto di questa specie di Baccara , ma bensì di altra specie diversa : di talchè se egli si avesse dato la pena di riscontrarne le altre specie avrebbe veduto che essendo quattro diverse piante quelle che presso gli antichi portavano il nome di Baccharis (1), una di esse avrebbe potuto essere l'*Asarum europaeum* senza essere punto la Baccara di Dioscoride. Alcune qualità comuni alle due piante han potuto far credere agli antichi che anche la pianta di Dioscoride potesse ritenersi per l' Asaro. È cosa risaputa che nella totale deficienza delle norme scientifiche , più di ogni altro l' attenzione degli antichi botanici si aggirava intorno alle qualità delle piante , che a quei tempi formava quasi l'unico oggetto dello studio botanico. Dioscoride parlando della Baccara avea detto che le sue radici somigliano a quelle del *Veratro* , ossia *Elleboro nero* , ed hanno un grato odore aromatico. Le radici dell'Asaro hanno le stesse precise qualità , e perciò diveniva facile il confonderle insieme. Chi si volesse spingere più oltre in tale disamina legger potrebbe il lungo comento che appone il Mattioli alla Baccara di Dioscoride. Tutto ciò ch' egli ne dice ne conferma la classificazione fattane ritenendola per l' *Inula odora*. Questa è l'erba che per l'aromatico odore delle sue radici era nota agl' italiani col nome d' *Incensaria* , ed è pianta della nostra Flora. Nel linguaggio popolare volentieri il nome dell' una avrà potuto passare all'altra pianta. Virgilio additando l' Asaro ai pastori sotto tal nome avrà

(1) Non accade rammentare che Linneo ha trasportato questo nome su di un genere della Syngenesia che non contiene alcuna delle Baccare degli antichi.

potuto benissimo ignorare che Teofrasto e Dioscoride lo stesso nome imposto aveano ad una pianta diversa dall'Asaro. Anche nell' odierno splendore della scienza delle piante c' imbattiamo ad ogni passo in nomi popolari identici imposti a piante diverse; come per l'opposito la stessa pianta spesso troviamo con vari nomi indicata in diversi paesi dello stesso Stato, ed anche della stessa provincia. In forza di queste considerazioni siam d' avviso che la Baccara di Virgilio riferir debbasi all' *Asarum europaeum*, mentre quella di Dioscoride appartener debba all'*Inula odora*; salvo a meglio definirne il color de' fiori, siccome sarà detto più appresso.

Intorno a tali ambiguità appositamente ragionando il nostro insigne Fabio Colonna, si avvisava poter produrre una sua congettura in forza della quale una terza Baccara troviamo registrata nel Pinace che andrebbe riferita al *Carpesium cernuum*.

Illustra il Colonna questa pianta nella sua Ecphrasis (1. p. 251) sotto il nome di *Aster altera species an Baccharis?* e molto opportunamente si duole egli della divergenza delle opinioni che scorgeva regnare intorno alla Baccara « *Nemo recentiorum est* (egli dice) *qui veram Baccharim se invenisse non censeat, neminem quidem adhuc veram habuisse certioris judicii esse credimus* ». Passando dipoi ad esaminare i caratteri della sua pianta e fermandosi specialmente, come di ragione, sulle qualità delle radici di essa, le trova corrispondere a quelle che Dioscoride assegna alla sua Baccara. Il Carpesio, altra pianta della nostra Flora, ha radici perenni simili a quelle dell'Elleboro nero, e di grato odore aromatico, e perciò non a torto il Colonna riconoscer vi poteva le più note-

voli qualità della detta Baccara; egli però, l'acutissimo Lincèo, non seppe dissimularsi la divergenza del testo di Dioscoride in quanto al colore de' fiori, i quali son gialli nel Carpesio, e non *ex purpura albicantes* come diconsi quelli della suespressa Baccara: benvero molto accortamente ne avverte egli che tal colore non conviene ad alcuna delle piante proposte per la Baccara di Dioscoride, » *quod et caeteris ab aliis descriptis plantis etiam vitio* » *est.* » Noi, come il promettemmo testè, non mancheremo di ritornare su tal quistione del color de' fiori, frattanto diremo dell' ultima delle quattro Baccare del Pinace, cioè di quella del Mattioli e di Montpellier.

A questa Baccara, riferita alla *Conyza squarrosa*, si appartiene benanco la *Conyza major vulgaris* del Bauhin e di altri. Essa perciò è ben diversa dall' altra *Conyza major* genuina di Teofrasto e dello stesso Dioscoride, che va riferita all' *Inula viscosa*. Or di quella prima *Conyza major vulgaris*, cioè della *Conyza squarrosa*, non si può leggere senza la maggiore sorpresa come alcuni antichi abbiano potuto sostenere esser dessa la Baccara di Dioscoride, e come copiandosi l' un l' altro ne abbiano sempre riprodotta la stessa figura meritamente condannata dal Colonna. Questa *Conyza major vulgaris* del Mattioli, non di Teofrasto e Dioscoride, ha le radici fittonate, ramose annuali o tutt' al più bienni, fatue affatto e scevre di qualunque menomo odore aromatico e soave; che perciò, comunque i suoi fiorellini tuttochè gialli di sopra fossero alquanto tinti di rossigno al di sotto, giammai per tale più che lontana somiglianza col colore che Dioscoride assegna ai fiori della sua Baccara, si direbbe esser dessa la Conyza squarrosa. Tra gli antichi, che lo han pensato, più di tutti ne sembra

mancar di logica il Lobel (adv. p. 245), talchè si sarebbe tentato di chiedergli a qual'altra pianta avesse egli rivolto il pensiero quando la sua dottrina fa servire a descrivere la radice di tal sua pretesa Baccara; *Radix*, egli dice, *summo cespite sparsa*, *diffusis fibris caryophyllatae modo, cujus odorem praestantissimum halat, vel cinnamomi*, e più appresso soggiunge chiamarsi perciò quelle radice da Ateneo Παγχαρις, e non già Βακχαρις *propter eximiam fragrantiae gratiam cinnamomeae radicis*, *ex qua cum multis aliis unguen conficiebant.*

Fortunatamente la *Conyza squarrosa* è pianta comunissima che nasce finanche sulle mura e lungo le siepi de' nostri colli; ognuno potrà perciò osservarne le radici, e convincersi del grosso svarione di Lobel, del Mattioli e di quanti altri avran potuto ritenerla per la Baccara del Dioscoride.

Dietro tali considerazioni ricade opportunamente il nostro discorso sulla Baccara di Giambatista della Porta, la quale non sarebbe alcuna delle quattro Baccare in discorso; ma bensì tutt' altra pianta da essa diversa, comunque affine all' ultima testè mentovata. Essa sarebbe, cioè, la *Conyza major vera* di Teofrasto e di Dioscoride, che va riferita all' *Inula viscosa.* Questa pianta che partecipa notabilmente dell' odor balsamico aromatico ricercato nella Baccara avrà potuto fissar l' attenzione del nostro insigne fisiografo per averla veduta crescere comunissima nelle campagne che costeggiano il Garigliano e che si stendono fino al mare. Di verun altra delle piante di cui abbiamo impreso a trattare avrebbe egli potuto dire *quam copiosissime fruticare vidimus.* La sola *Inula viscosa* cresce in grande abbondanza in tutte le maremme del regno. Essa sola si

spande in ampi cespugli perenni non solo, ma con ceppaje legnose da doversi ritenere per suffrutici, anzichè per erbe. Osservandola alla sfuggita il Porta avrà potuto confonderla colla Baccara di Dioscoride e con quella di Virgilio, intorno alle quali tante confuse idee si ventilavano a suoi tempi.

Poche parole aggiungeremo intorno all' equivoco colore attribuito da Dioscoride ai fiori della sua Baccara; pel qual colore presumer potrebbesi sconvenire dall' *Inula odora*, cui vuolsi dai botanici attribuire.

Nel testo greco Dioscoride dice aver la sua Baccara ανθη δε εμπορφυρα ὑπολευκα, che gli espositori han tradotto in *flores ex purpura albicantes*. I fiori dell' *Inula odora* presi nel loro preciso senso sono di color giallo, e tali sono ancora quelli del Carpesio, della Conyza squarrosa, e dell' Inula viscosa; il solo Asaro gli ha di color livido nerastro, senza la menoma traccia di bianco. Niuna di queste quattro piante sarebbe in tal caso la Baccara di Dioscoride, come opportunamente lo avvertiva il Colonna. Non pare d' altronde che per tal difetto ricorrer si potesse alla *digitalis purpurea*, solo perchè si pretende che ai fiori di essa convenir potrebbe il colore che Dioscoride assegna ai fiori della sua Baccara. Noi frattanto non crediamo estraneo alla quistione il fermarci brevemente a meglio chiarire le parole del testo dianzi riferite: ανθη δε εμπορφυρα ὑπολευκα, cioè *flores ex purpura albicantes*.

Noi osserveremo che qui non si tratta punto di due tinte distinte che spiccano, ciascuna isolatamente nello stesso campo del fiore, il porporino cioè ed il bianco, come precisamente si scorge ne' fiori della *digitalis purpurea*; ma bensì di due tinte stemprate insieme per comporre un

color terzo che partecipa di entrambe; ciò ne sembrano suonare le parole *ex purpura albicantes* che nell'italiano ben potremo rendere per *porporino pallido*, *porporino smorto*, *porporino sbiancato*, ed in parafrasi, che dal porporino volgono al bianco. Ai fiori della digitale purpurea neppur convengono tali caratteristiche quando anche chiuder si volessero gli occhi al ripetuto difetto di tutte le qualità che Dioscoride assegna alla sua Baccara. Noi senza prescindere assolutamente dalla incertezza in cui ne sono rimasi gli autori intorno al preciso colore de' fiori della Baccara di Dioscoride, avvisiamo poterne produrre la seguente congettura.

Ritenendo come cosa notissima che Dioscoride nel descrivere le virtù delle piante, poca attenzione abbia portata su quelle parti che ne sono prive: ritenendo in pari tempo che in nessun luogo siasi egli fermato a descrivere minutamente le complicate parti de' fiori della famiglia delle *compositae*, avvisiamo aver egli inteso parlare non de' precisi fiorellini che formano i fiori composti dell' *Inula odora*, ma bensì de' capolini che loro succedono, e che si compongono di minutissimi semi coronati di piumoso pappo, che nel loro insieme mostransi tinti di color rossastro, che dal più forte presso l'attacco de' semi va ad impallidirsi in cima, *ex purpura albicantes!* Tali in effetti noi li osserviamo nelle diverse specie di Inule, e singolarmente nell' *Inula viscosa*, che il della Porta confondeva perciò coll' *Inula odora* e quindi colla Baccara di Dioscoride: tali li scorgiamo benanco in diverse specie di *Erigeron*, di *Gnaphalium*, ed in altre simili *compositae*.

Lasciando ai filologi il più accurato esame intorno al vero senso delle parole testè riferite, ci limitiamo a ram-

mentare quanta sia la povertà e l' incertezza de' lessici di tutte le lingue nell' esprimere le svariate tinte de' naturali prodotti, che spesso facciamo servire di tipo e di confronto tra loro. Diciamo, per esempio, *Haematoxylum* ossia *legno di sangue* e così chiamiamo il legno Campeccio dal suo specioso grado di rosso, come dal color dell' oro appelliamo i fiori del *crisantemo*, e così per innumerevoli altri esempi. Crediamo perciò non dover essere troppo scrupolosi nell' ammettere che gli antichi trovandosi nello stesso imbarazzo abbiano potuto alle volte poco esattamente definire il colore di alcuni fiori.

Dietro tali considerazioni non esiteremo a ritenere nel seguente modo diffinite le diverse Baccare degli antichi

1. Baccara di Dioscoride = Inula odora L. (1)

(1) Di un' altra *Baccara* di Dioscoride fa menzione il sig. Fraas nella sua *Synopsis plantarum Florae classicae* (München 1845) col disseppellire l' opinione del Rauwolf già rifiutata dai botanici non meno che dagli scrittori tutti che hanno illustrato le piante degli antichi. Viaggiando il Rauwolf nella Siria sul declinare del secolo decimosesto vi raccoglieva una specie di *Gnophalium* pel quale per la sola caratteristica de' calici tinti di color rosso si avvisava poter riconoscere la Baccara di Dioscoride (Rauwolf. Itin. pag. 585, tab. 285 — Laningen 1583) Poco più tardi Giovanni Bauhin (Hist. 3, p. 163), e Dalecham (Hist. app. p. 35) si limitavano a registrare nelle loro compilazioni la *Baccara del Rauwolf*, ritenendola diversa dalla Baccara del Dioscoride. Niente di più preciso seppero dirne Barrelieri, Pluknet, e lo stesso Linneo, che nel suo *Species plantarum* descrisse la pianta del Rauwolf col nome di *Gnaphalium sanguineum*. È da notarsi che sin d' allora sì poca fede prestavasi all' opinione del Rauwolf, che nella prima delle due centurie di piante descritte dal Pr. Juslen, ed inserite nel tomo 4.° delle *Amoenitates Academicae* dello stesso Linneo, troviamo al num. 78 riferito il *Gnaphalium sanguineum*, col sinonimo di *Baccharis Dioscoridis* Rauwolfi, ed immediatamente appresso sotto il num. 79 un altra *Baccharis Dioscoridis* che lo stesso autore delle due centurie descrive come specie propria e vi riferisce il sinonimo *Conyza major altera pin. 265 del Bauhin.*

Ecco ciò che ora ne scrive il Fraas.

Gnaphalium SANGUINEUM Lin.

2. Baccara di Virgilio = Asarum europaeum L.
3. » di Colonna = Carpesium cernuum L.
4. » di Mattioli = Conyza squarrosa L.
5. » di G.B. della Porta=Inula viscosa L.

Βακχαρις Dioscor. 3. 31. Plin. 21. 6. 19. Virgil. eclog. 4. 19, e 7. 27. *Baccharis Baccar.*

Segue la nota quì appresso che traduciamo dal tedesco.

» Io non conosco questa pianta ; la riporto quì per seguire l'autorità ; e per
» Baccara di Dioscoride riterrei piuttosto l'*Echium rubrum* se vi corrispondesse
» l'aroma e la radice. — I fiori rossi, talvolta bianchi ed anche celesti, nonchè
» la ruvidezza delle foglie, ed il fusto dritto ci calzano assai bene. Frattanto
» Dioscoride ritiene la sua pianta più prossima alla Lycopsis !

Dopo tante ambiguità , noi ci asterremo volentieri di farne altre parole , e rimanderemo coloro che ne avessero vaghezza a raccogliere dalle cose riferite in questa nostra scrittura le prove delle assurdità cui si andrebbe incontro, se si volesse adottare l' opinione del Rauwolf. Diremo soltanto che lo stesso *Gnaphalium sanguineum* è pianta tanto poco nota che il Decandolle non ne ha potuto fissare con certezza il genere, e si è astenuto dal sottoporla ad ogni critico esame. Noi abbiamo veduto di sopra quanto leggermente ne abbia trattato lo stesso Pr. Fraas; che perciò poco ragionevole ne sembra l'avventato collocamento ch'egli ha fatto delle piante di Dioscoride Plinio e Virgilio sotto la sepolta Baccara del Rauwolf.

RAPPORTO ALL' ACCADEMIA

DELLA MEMORIA

DEL SOCIO CAV. MICHELE TENORE

INTORNO

ALL'ERBA BACCARA DEGLI ANTICHI

Tra i progressi meravigliosi, che le scienze fanno ogni giorno, quelli spettanti all'Archeologia non sono men degli altri importanti. Dappoichè ricercando il sapere ed i fatti degli antichi, nuove verità si scuoprono, e si soddisfa al desiderio o necessità naturale dell'uomo di voler conoscere l'essere e la dottrina degli antenati per qualunque rispetto.

A questo studio sull'antichità appartengono ancora le ricerche dei botanici sulle piante nominate ed adoperate dagli antichi; e l'interpretazione della natura di certi vegetabili che più non esistono, e di cui gli avanzi e le impressioni si trovano nella terra. Rispetto alle piante di cui i libri antichi parlano, a quelle indicate da Virgilio si è rivolto il maggior numero dei dotti. La celebrità del poeta, l'aver egli fatto sulla coltivazione il miglior poema didascalico che mai fosse; e l'essersi nelle altre sue poesie servito dei fiori a ritrarre casi umani ed immagini peregrine richiamano continuamente la loro attenzione.

Il nostro illustre botanico Cav. Tenore versato in sì fatto genere di studi, nel pubblicare che fece molti anni sono alcune osservazioni sulla flora virgiliana, avendo toc-

cato leggermente della baccara proposta dal sommo poeta per allontanare il fascino, vi ritorna adesso con una lunga dissertazione, facendo vedere qual fosse veramente la baccara di Virgilio, e gli errori in cui gli espositori sono caduti su tale proposito. Nota in primo luogo non poter essere la digitale porporina, siccome alcuni hanno creduto, allegando due irrefragabili ragioni, la mancanza di qualunque odore sensibile in tal pianta, mentre la baccara deve avere le radici aromatiche, ed il non essersi ancora trovata in niuna parte d'Italia. Combatte poi l'opinione di Giov. Battista della Porta, il quale pretendeva aver veduta la baccara di Virgilio presso le sponde del Garigliano, assegnandole un fusto ramoso rossastro, foglie scabrose quasi lanuginose e la radice fornita di soave odore di cinnamomo. Da tutto ciò desume il Tenore doversi tal pianta riferire all'*Inula viscosa* dei moderni botanici. Viene finalmente a dimostrare che la baccara del Lobelio è l'*Asarum europaeum* dei moderni, quella del Dioscoride è l'*Inula odora*, l'altra di Fabio Colonna il *Carpesium cernuum*, e come la *baccaris monspeliensium* del Gesnero sia la *Conyza squarrosa*; dichiarando diffusamente che niuna di queste tre ultime (*Inula odora*, *Carpesium cernuum*, *Conyza squarrosa*) si debba riferire alla vera baccara virgiliana, quantunque la pianta di Dioscoride vi avesse maggiori rapporti, massime per la qualità aromatica della radice. Crede adunque il nostro chiarissimo botanico che la baccara di Virgilio sia l'*Asarum europaeum*, secondo l'opinione di Lobelio seguitata dal maggior numero dei comentatori sulle piante virgiliane.

Le poche ragioni allegate a noi non sembrano ancora sufficienti per attenerci indubitatamente alla stessa opinione.

Dappoichè considerando che la baccara essendo in voga contro al fascino, naturalmente dovea essere pianta comune in Italia nota al popolo, ed il poeta invita i pastori arcadi a cingerne la fronte al fanciullo, non pare fosse questo appunto il caso dell'asaro, pianta montana piuttosto rara, di luoghi ombrosi ed umidi. Plinio poi distingue la baccara dall'asaro tanto pei caratteri esterni, quanto per le proprietà medicinali con tal precisione da non lasciare il menomo dubbio sulla loro diversità. « Asarum » herba, egli dice, folia habens similia hederae, rotun- » diora tamen et molliora, florem purpureum, radicem » gallici nardi, semen acinosum, saporis calidi et vinosi ». I quali caratteri si riscontrano esattamente nell'asaro dei moderni, tranne il colore dei fiori ch'è livido fosco con leggera sfumatura di porpora, non già affatto porporino. E rispetto alle proprietà medicinali da lui assegnate a tal pianta, esse sono precisamente quelle che i medici di ogni tempo vi hanno riconosciute. E della baccara pone: « Bac- » car quoque radicis tantum odoratae est, a quibusdam » nardum rusticum appellatum. Unguenta ex ea radice » fieri solita Aristophanes priscae comoediae poeta testis » est. Odor est ei cinnamomo proximus. Gracili solo nec » humido provenit. Simillimum ei combretum appellatur, » foliorum exilitate usque in fila attenuata, et procerius » quam baccar. Nec haec sunt tantum, sed eorum quoque » error corrigendus est, qui baccar rusticum nardum ap- » pellavere. Est enim alia herba sic cognominata, quam » Graeci *Asaron* vocant ». Sì fattamente adunque il celebre naturalista antico era convinto della gran differenza tra le due piante che rimprovera coloro che anche a suoi tempi le confondevano. E dappoichè la sua baccara rassomiglia egli al combreto colle foglie filiformi, essa non

può essere nè anche l' *Inula odora* creduta la baccara di Dioscoride, non ostante il colore dei fiori in tal pianta fosse intieramente giallo non già porporino con sfumatura di bianco, siccome quella di Dioscoride.

Se Plinio adunque conosceva veramente la baccara, essa sulle sue parole deve avere la radice odorosa quasi di cinnamomo, le foglie strette, e nascere in terreno magro leggiero; non sarebbe per ciò nessuna delle tante avanti menzionate. Nè sapremmo dire con certezza in quale pianta italiana comune questi tre caratteri si riscontrano. Solo nella *valeriana officinale* ci par di scorgere tutte e le molte proprietà medicinali assegnate da Plinio alla sua baccara; ed inoltre le radici aromatiche, le foglie strette. Essa è comune pei monti, i luoghi bassi, ed anche nei boschi; viene in terreno leggiero, fosse anche asciutto, ma ama in generale piuttosto quello alquanto umido.

Per sì fatte considerazioni la commissione non vede nell'asaro indubitatamente la baccara di Virgilio. Ma scorge nelle ricerche fatte dal Tenore molto lavoro ed il solito suo accorgimento in somiglianti studi. Per aver egli escluse con molto giudizio tante piante riferite alla baccara, la quistione è divenuta più semplice, e la via agevole a poter raggiungere appresso sicuramente lo scopo. Per queste ragioni, ritenendo però ancora come semplice opinione, che la baccara di Virgilio corrisponda all'asaro dei moderni; la commissione crede che il lavoro dell'illustre nostro espositore meriti sia noto ai dotti e pubblicato negli atti dell'Accademia.

Napoli 28 marzo 1852.

Giovanni Gussone
Guglielmo Gasparrini relatore.

Avendo la Classe approvato il parere de' Commissarii, l'Accademia nell'adottarne il giudizio ha deciso che la precedente relazione s' inserisse negli atti dopo la memoria del cav. Tenore.

UN' ALTRA BACCARA!

APPENDICE

ALLA MEMORIA SULL' ERBA BACCARA DEGLI ANTICHI

DEL SOCIO RESIDENTE

Cav. Michele Tenore

letta all' Accademia nella tornata
de' 25 luglio 1852

Nel ricevere il graditissimo dono del 3.° fascicolo del 6.° volume dei nostri Atti, al seguito della mia memoria testè citata, con piacevole sorpresa, io trovava inserito il rapporto de' commissarî incaricati dell' esame di essa. Allora mi era facile il raccoglierne che quei miei degnissimi colleghi da me dissentivano nella classificazione della Baccara di Virgilio, che io, adottando l' opinione del maggior numero de' botanici che si sono applicati ad illustrare le piante virgiliane, riferiva all' Asaro. Eglino

però, non saprei dire per quale fortunata circostanza, invece d'istituirne il confronto colla Baccara di Virgilio venivano a descrivere le particolarità che differir fanno l'*Asaro* dalla Baccara di Plinio. Confessar deggio di essere stata quella l'occasione di farmi pensare alla Baccara Pliniana, cui nelle ricerche fatte scrivendo la cennata memoria non avea posto mente.

Lo Sprengel che nella sua *Historia rei herbariae* non ha mancato d'illustrare, e classificare scientificamente le piante della Flora Pliniana, ne passa sotto silenzio la costui Baccara (1). La mia sorpresa cresceva allorchè nello stesso rapporto trovava consegnate le seguenti parole: « Se » Plinio adunque conosceva veramente la Baccara, essa, » sulle sue parole, deve avere la radice odorosa quasi di » cinnamomo, le foglie strette, e nascere in terreno ma- » gro leggiero, non sarebbe perciò nessuna delle tante » avanti menzionate. »

Dopo tale categorica manifestazione, si appalesava chiara la nessuna applicazione che avrebbe potuto farsi della dimostrata diversità tra l'Asaro e la Baccara di Plinio, all'altra presunta diversità tra lo stesso Asaro e la Baccara di Virgilio, che dagli stessi commissarî veniva riconosciuta affatto diversa dalla Baccara Pliniana. Or men-

(1) Trovasi egli è vero citato Plinio al seguito di Dioscoride presso diversi autori che la costui Baccharis ritengono per lo *Gnaphalium sanguineum;* ma opportunamente il Billerbeck avverte esser questa pianta affatto inodora (*nicht* odoratissimum), laddove alla baccara degli antichi si attribuiva una radice così sopraccarica di principî aromatici che veniva adoperata a preparare un olio odorosissimo! (Flora classica pag. 215).

tre per tale ineluttabile argomento per nulla infermata ne rimaneva la ripetuta classificazione della Baccara di Virgilio, mi allietava il pensiero di vederne crescere in pari tempo la serie delle Baccare degli antichi; talchè al seguito delle cinque specie che ne aveva io illustrate, una sesta veniva a prender posto, e questa n'era rappresentata dalla Baccara dell'insigne naturalista veronese.

Applicandomi a profittare delle ricerche fattevi da' nostri chiarissimi colleghi, le altre seguenti parole ne leggeva io nello stesso loro applauditissimo rapporto. « Nè » sapremo dire con certezza in quale pianta italiana co- » mune questi tre caratteri si riscontrano (*radice odorosa* » *quasi di cinnamomo, foglie strette, nascere in terreno* » *magro leggiero*). Solo nella *Valeriana officinale* ci par » di scorgere tutte e le molte proprietà medicinali asse- » gnate da Plinio alla sua Baccara, ed inoltre le radici » aromatiche, e le foglie strette ».

Rispettando sempre l'opinione emessa dai miei colleghi, dissimular non saprei le difficoltà che s'incontrano nel volerla adottare. Senza parlare dell'odor proprio delle radici della *valeriana officinale*, certamente tutt'altro che l'odor gratissimo della cannella, di maggior peso troveremo la discrepanza manifesta ne' caratteri della pianta. Noi la leggeremo compendiata nelle altre seguenti parole del testo Pliniano riferite (alla Baccara) nel rapporto « *Si-* « *millimum ei Combretum appellatur*, *foliorum exilitate* » *usque in fila attenuata et procerius quam Baccara* ». Il *combreto* di Plinio, compreso dagli antichi tra le specie di giunco, dallo Sprengel vien riferito alla *Luzula maxima;* comunque pe' fiori non solitarî, ma raccolti in ca-

polini ovati, giusta la figura del Tabernamontano (1) citata dal Bauhin (2) sotto il cennato *combreto* di Plinio, meglio andasse riferito alla *Luzula stricta.*

In ambedue i casi trattasi sempre di piante con piccole foglie lineari intatte acute, mentre nella *Valeriana officinale* le foglie sono composte pinnate, o *pinnatisectae* come le dicono i moderni, con molte coppie di fogliolіne o lacinie bislunghe e dentate; dippiù Plinio aggiunge al paragone la qualità dell'altezza del suo *Combretum* dicendolo *procerius*, cioè più alto di esso nella sua Baccara. La *Valeriana officinale* è alta quattro a sei piedi, ed il *Combreto* dovrebbe essere alto anche dippiù. Frattanto la *Luzula stricta* si alza appena 6 a 10 pollici e la stessa *Luzula maxima* non aggiunge i 18 pollici. Come mai Plinio avrebbe potuto chiamare *simillimae* due piante tanto tra loro diverse!

Fortunatamente, senza uscire dallo stesso genere *Valeriana*, facendo tesoro delle ricerche additatene dagl'illustri socî, altra specie potremo proporne che soddisfa a tutte le condizioni richieste dalla Baccara di Plinio: e questa si è la *Valeriana saliunca*, specie affine alla *Valeriana celtica*, che già alla *Baccara* di Plinio veniva da qualche antico scrittore riferita. Erano queste piante ritenute quali specie di *nardi*, e perciò piante eminentemente aromatiche e medicinali. Sotto la quarta specie di essi

(1) *Gramen lucidum;* Icones plantarum etc. Francoforti ad Moenum 1590 fig. 206.

(2) *Gramen hirsutum capite globoso. Combretum Plinii* Ang. *Herba* Luziola vulgo Caes. *Gramen lucidum* Tab. Gasp-Bauhini Pinax Theatri botanici. Basileae 1671 pag. 7.

Nardi, noi la troviamo nello stesso *Pinace* del Bauhin, registrata con i seguenti titoli:

Nardus ex Apulia. Saliunca Neapolitana; Dalechamp. *Historia universalis plantarum.* tom. 1. p. 982. *Phu minus apulum. Nardus ex Apulia* Tabern. fig. 870.

Questa graziosa piantina nasce negli appennini di tutta Italia, e particolarmente nel nostro Regno: al Vettore, al Gargano, alla Majella, al Monte Corno; ne' quali luoghi l'Orsini, il Mauri, il Cav. Gussone ed io ne abbiamo fatta copiosa raccolta. Le radici della *Valeriana saliunca* hanno grato odore aromatico, le sue foglie sono strette lanciolate aguzze, e tutta la pianta non si alza più di 4 pollici. Se vorremo darci la pena di paragonare tra loro le citate antiche figure e le descrizioni del *Combreto* e della *Saliunca*, ci troveremo la precisa somiglianza avvertita da Plinio, e dippiù trovandola registrata tra i *Nardi* faremo plauso a quel principe de' naturalisti perchè, a malgrado di tanta somiglianza, condannava coloro che avrebbero voluto confondere la sua *Baccara* con i *nardi* anzidetti: *Eorum quoque error corrigendus est, qui Baccar rusticum nardum appellavere.* Sono parole del testo inserite benanco nel surriferito rapporto.

Questa specie di *Valeriana*, comunque tanto celebrata dagli antichi, ne rimaneva trasandata nelle scientifiche botaniche classificazioni, senza escluderne quella dello stesso *Species plantarum* del Linneo. L' Allioni la descriveva nel 1785 nella sua Flora pedemontana (1) colla nota = *Fortissimus odor quem Valeriana saliunca undequaque*

(1) tom. I, p. 3. n. 9. tab. 70 fig. 1.

diffundit, *maximas omnino vires spondet.* Eccovi le molte proprietà assegnate da Plinio alla sua Baccara (1). Il Vahl, botanico danese la pubblicava nella sua *Enumeratio plantarum* (1805) (2), e successivamente ha figurato nelle relazioni de' miei viaggi in Abruzzo (3), e nella stessa Flora Napolitana (4).

Così illustrata, la Baccara di Plinio, come il dissi testè, verrà degnamente a prender posto tra le diverse Baccare degli antichi, e sarà la sesta di quelle che mi è sembrato poterne classificare.

VI. *Baccara di Plinio.*

Valeriana Saliunca Vahl, e Fl. nap. l. c.

Non tralascerò di ripetere in questa occasione ciò che dissi in quella mia memoria intorno al criterio che sembra aver guidato gli antichi nelle ricerche della *Baccara:* Aver eglino considerato in primo luogo le qualità attribuite alla radice della Baccara; come il vedemmo nelle *Baccare* di Dioscoride e di Virgilio, così lo troviamo confermato in questa di Plinio. Così in questa come nelle altre analoghe investigazioni, fermandosi leggermente sui caratteri scientifici delle piante, con maggiore studio ne andavano essi raccogliendo gli usi empirici. La *Baccara* essendo decantata pel forte aromatico odore delle sue ra-

(1) Rapporto cit.
(2) 2. p. 5.
(3) p. 42.
(4) 3. p. 31.

dici, onde per gli usi medicinali non solo, ma anche per farne unguenti da istrioni veniva adoperata, egli è in questo solo carattere che le predicate *Baccare* di Virgilio, di Dioscoride e di Plinio, e per esse le piante che proponiamo sorrogarvi l' *asaro*, l' *inula odora* e la *valeriana saliunca* troviamo convenire perfettamente.

INDICE

DEL PRESENTE FASCICOLO

Prezzo del presente fascicolo . . . . . ℰ 0, 40

ATTI DELL' ACCADEMIA PONTANIANA

FASCICOLO IV DEL VOLUME VI

AVVISO

L' accademia Pontaniana pubblica i suoi atti in fascicoli, affinchè possano sollecitamente conoscersi le memorie a misura che sono approvate.

Ogni fascicolo si pubblica subito che si ha sufficiente materiale e senza astringersi ad alcun determinato periodo o numero di fogli.

Terminati i fascicoli che debbono comporre un volume, si dà il frontespizio, la dedica, e la storia de' lavori accademici da premettersi al volume medesimo.

NAPOLI
DA' TORCHI DEL TRAMATER
1854

SUL MODO

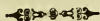
DI RIDURRE GL' INTEGRALI

DELL' EQUAZIONI LINEARI DI PRIM' ORDINE A DIFFERENZE MISTE IN SEMPLICI INTEGRALI DEFINITI

MEMORIA

letta all' Accademia nella tornata de' 22 Agosto 1852

DAL SOCIO RESIDENTE

ab. Remigio del Grosso

Il *Calcolo delle differenze miste*, ovvero quel ramo di Analisi Sublime, che versa sull' integrazione dell' equazioni, le quali contengono e variazioni finite e coefficienti differenziali di una funzione di più variabili, è trovato del Condorcet, come abbiamo dalla Storia delle Matematiche; e dal suo *Saggio sull' applicazione dell' Analisi alla probabilità delle decisioni* rilevasi qual uso mirabile abbia saputo farne questo chiaro Geometra. Due altri Geometri Francesi, suoi contemporanei ed ancor più valorosi di lui, dir voglio Laplace e Poisson, in seguito allargarono di molto i confini di questa teorica, come è dato vedere negli Atti dell' Accademia di Parigi e nel Giornale della Scuola Politecnica. Ma è al nostro chiarissimo Italiano Pietro Paoli, che si debbe la lode di averla completamente discorsa e sviluppata nel terzo de' suoi Opuscoli Matema-

tici, lavoro veramente originale del suo ingegno. Il procedimento seguito da questo rinomato Analista riducesi a cercare primamente un integral particolare della proposta equazione, e di poi a generalizzarlo sostituendo funzioni arbitrarie ad espressioni particolari, e mostrare che in questa guisa modificato ancor soddisfaccia alla equazione proposta. Questa maniera d' integrazione, comechè sia stata immaginata dall' immortale Lagrangia, pure non può negarsi che sia indiretta e particolare: onde se è vero che crescesi pregio e perfezione ad ogni qualunque scienza, allorchè le sue verità per via diretta e generale si dimostrano, forza è concludere, che riuscendosi ad integrare cotesto genere di equazione con metodo diretto e generale nè il tempo nè l' opera si getta via. Oltre di ciò è da notare che in tutte le integrazioni, che il nostro egregio Italiano imprende ad eseguire, si suppone che la *variabile per differenze finite* sia discontinua, e non capace di prendere altri valori, se non quelli de' numeri interi e positivi. Quindi, anche per questa altra ragione, il problema è sempre risoluto particolarmente, e lascia in chi legge un desiderio di più generale soluzione, sì che si estenda anche al caso, nel quale sia continua la variabile che riceve finiti incrementi.

La Memoria, che sommetto al sapiente giudizio di questa illustre Accademia, tende a ripianare cotesti due vuoti, che si ravvisano nella teorica dell' integrazione dell' equazioni a differenze miste dataci dal Paoli, e che sono di non piccol rilievo. In questo lavoro io ho preso a ridurre la determinazione di siffatto genere d' integrali a quella di semplici integrali definiti dipendenti da una novella variabile. Si comprende di leggieri che con questo

procedimento nulla si particolarizza circa l'indole della variabile, che nella proposta equazione cangia per differenza finita; e perciò l'integrale, che si ottiene, vale sì quando ella è discontinua, come quando è continua. Inoltre il metodo è diretto, e propriamente quello stesso metodo che si adopera nella ricerca degl' integrali definiti. E se non sempre è dato di far disparire da quest' integrali la novella variabile, e di ridurli a funzioni delle sole variabili contenute nell' equazione proposta, ma solo quando le variabili, che prendono incrementi finiti, sono discontinue, come dianzi abbiamo notato, cotesto per certo non toglie pregio al metodo, come tutti gli Analisti convengono. Siccome però troppo esteso è questo campo, mi son limitato in questa Memoria a considerare le sole equazioni a differenze miste e lineari del prim' ordine, riserbandomi in altro apposito lavoro di trattar dell' equazioni a differenze miste degli ordini superiori.

§. I.°

Equazioni a differenze miste e lineari del prim' ordine fra due variabili indipendenti.

La forma più generale di quest' equazione si è

$$z_{x+1}=Az_x+B\frac{dz_x}{dy}+C \qquad (1),$$

rappresentando A, B, C date funzioni delle due variabili x, y. Supponiamo primieramente $C=0$, ed A, B funzioni della sola variabile y, sì che abbiasi

$$z_{x+1}=A_y\, z_x+B_y\frac{dz_x}{dy} \qquad (2);$$

e sia

$$z_x=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega\omega^x\, d\omega \qquad (3)$$

l' integrale di questa equazione, rappresentando con ω una nuova variabile indipendente, con Ω una incognita funzione di y ed ω, e finalmente con ω', ω'' limiti indipendenti da y, x. Cangiando x in $x+1$ nella (3), si avrà

$$z_{x+1}=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega\omega^{x+1}\, d\omega,$$

e differenziando la medesima equazione rispetto ad y otterremo

$$\frac{dz_x}{dy}=\int_{\omega'}^{\omega''}\frac{d\Omega}{dy}\omega^x\, d\omega.$$

Ciò posto, la (2) si traduce in

$$0=\int_{\omega'}^{\omega''}\omega^x d\omega\left\{(\omega-A_y)\Omega-B_y\frac{d\Omega}{dy}\right\},$$

equazione alla quale si soddisfa ponendo

$$o=(\omega-A_y)\Omega-B_y\frac{d\Omega}{dy}.$$

Integrando questa equazione a differenze parziali, e completando l' integrale con una funzione arbitraria della nuova variabile ω, si avrà

$$\Omega=F(\omega)e^{\int\frac{\omega-A_y}{B_y}d\omega},$$

e quindi sostituendo nella (3) verrà pel cercato integrale

$$z_x=\int_{\omega'}^{\omega''}F(\omega)e^{\int\frac{\omega-A_y}{B_y}dy}\omega^x\,d\omega \quad (4).$$

Questo integrale si riduce ad una funzione delle sole variabili x, y, come l' integrazione rispetto ad ω si sarà eseguita fra i limiti $\omega=\omega'$, $\omega=\omega''$, ed è un integrale completo poichè contiene anche dopo questa integrazione una funzione arbitraria o della sola y o di y ed x.

Poniamo per brevità

$$Y=\int\frac{A_y}{B_y}dy, \quad Y'=\int\frac{dy}{B_y} \quad (5),$$

e sostituendo nella (4), e cacciando fuori del segno $\int$ il fattore indipendente da ω, verrà

$$z_x=e^{-Y}\int_{\omega'}^{\omega''}e^{\omega Y'}F(x)x^x\,dx.$$

Supponendo, come accade per l' ordinario, che la variabile x debba essere un numero intero $>$o, si ha per le note regole di differenziazione

$$\frac{d^x\,.\,e^{\omega Y'}}{(dY')^x}=\omega^x\,e^{\omega Y'};$$

e però sostituendo nella precedente equazione verrà

$$z_x = e^{-Y} \int_{\omega'}^{\omega''} \frac{d^x \,.\, e^{\omega Y'}}{(dY')^x} F(\omega) d\omega.$$

Ma si sa che si può sempre soddisfare alla equazione

$$\int_{\omega'}^{\omega''} f(\omega, u)\, d\omega = \mathrm{f}(u) ,$$

e che in questo caso si ha (*)

$$\frac{d^n \mathrm{f}(u)}{du^n} = \frac{d^n \,.\int_{\omega'}^{\omega''} f(\omega,u) d\omega}{du^n} = \int_{\omega'}^{\omega''} \frac{d^n \,.\, f(\omega,u)}{du^n}\, d\omega.$$

In conseguenza sarà

$$z_x = e^{-Y} . \frac{d^x . \Psi(Y')}{(dY')^x} \quad (6) ,$$

supponendo che Y ed Y' siano funzioni determinate per l'equazioni (5), e che $\Psi(Y')$ sia il valore dell'integrale definito

$$\int_{\omega'}^{\omega''} e^{\omega Y'} F(\omega) d\omega.$$

Quando C non è zero, ma sibbene una data funzione di y, se seguiteremo a supporre che tali pur siano A, B, la (1) riducesi a

$$z_{x+1} = A_y\, z_x + B_y \frac{dz_x}{dy} + C_y \quad (7) ,$$

ed il valore di z_x, che soddisfa a questa equazione, può farsi dipendere da quello, che soddisfa alla (2), nel modo seguente. Supponiamo

$$z_x = z'_x + M_y ,$$

(*) V. Cournot, traité élém. de la théor. des fonctions etc. tom. II chap. XI.

e sia M_y una incognita funzione della variabile y: è chiaro che sarà

$$z_{x+1}=z'_{x+1}+M_y\,, \qquad \frac{dz_x}{dy}=\frac{dz'_x}{dy}+\frac{dM_y}{dy}\,.$$

Sostituendo nella (7), avremo

$$z'_{x+1}+M_y=A_y\,(z'_x+M_y)+B_y\left(\frac{dz'_x}{dy}+\frac{dM_y}{dy}\right)+C_y\,.$$

A cagione di M_y funzione indeterminata di y, questa equazione si può scindere nelle altre due

$$(1-A_y)\,M_y=B_y\,\frac{dM_y}{dy}+C_y$$

$$z'_{x+1}=A_y\,z'_x+B_y\,\frac{dz'_x}{dy}\,.$$

Ora ponendo mente all' equazioni (5), sarà facile persuadersi che l' integrale della prima di quest' equazione si è

$$M_y=-\,e^{Y'-Y}\int e^{Y-Y'}\,C_y\,dY',$$

supponendo $=0$ la costante arbitraria, come qui dobbiamo fare, poichè ci bisogna un valore particolare di M_y; ed il valore di z'_x è quello stesso che dà per z_x la equazione (6). In conseguenza l' integrale completo della (7) sarà

$$z_x=e^{-Y}\left\{\frac{d^x\,.\,\psi(Y')}{(dY')^x}-e^{Y'}\int e^{Y-Y'}\,C_y\,dY'\right\}\ (8).$$

Applichiamo questo procedimento di calcolo a qualche caso particolare. Supponiamo primieramente che A, B, C siano quantità costanti, e sarà

$$Y=\frac{A.y}{B}\,,\ Y'=\frac{y}{B}\,,\ \int e^{Y-Y'}\,C_y\,dY'=\frac{C}{A-1}\,e^{\left(\frac{A-1}{B}\right)y},$$

$$(dY')^x=B^{-x}\,dy^x\,.$$

Sostituendo questi valori nella (8) si avrà

$$z_x = e^{-\frac{A.y}{B}} \left\{ B^x \frac{d^x \psi(y)}{dy^x} - \frac{C}{A-1} e^{\left(\frac{A-1}{B}\right)y} \right\}.$$

Quando $C = 0$, si ottiene

$$z_x = B^x e^{-\frac{A.y}{B}} \frac{d^x . \psi(y)}{dy^x},$$

integrale identico a quello ottenuto dal Paoli per mezzo di considerazioni tutte diverse (*).

Sia di bel nuovo $C=0$, ed A, B funzioni della sola x senza y, sì che la (1) diventi

$$z_{x+1} = A_x z_x + B_x \frac{dz_x}{dy} \quad (9).$$

Rappresentando con Ω una incognita funzione di x ed ω, si ponga esser l'integrale della proposta equazione

$$z_x = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_x e^{\omega y} d\omega ;$$

e risultando in questa ipotesi

$$z_{x+1} = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_{x+1} e^{\omega y} d\omega , \quad \frac{dz_x}{dy} = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_x \omega e^{\omega y} d\omega ,$$

sostituendosi nella (9) si avrà evidentemente

$$0 = \int_{\omega'}^{\omega''} e^{\omega y} d\omega \left\{ \Omega_{x+1} - (A_x + \omega B_x) \Omega_x \right\}.$$

Si soddisfa a questa equazione supponendo

$$\Omega_{x+1} - (A_x + \omega B_x) \Omega_x = 0 \quad (10).$$

(*) V. il III° opuscolo di questo celebre Analista Italiano, §. I.

Ora se si pone per brevità

$$A_x = B_x\, a_x\ ,\quad \Pi_1^{x-1}(B) = B_1\,.\,B_2\,.\,B_3\,\ldots\,B_{x-1}\ ,$$
$$(\omega+a_1)(\omega+a_2)(\omega+a_3)\ldots(\omega+a_{x-1}) = \omega^{x-1} + M'_x\,\omega^{x-2} + \ldots\ldots + M_x^{(x)}$$
$$= S_1^{x-1} M_x^{(i)}\,\omega^{x-i}\ ,$$

l' integrale della (10) sarà

$$\Omega_x = \Pi_1^{x-1}(B_i)S_1^{x-1}M_x^{(i)}\ \omega^{x-i}F(\omega).$$

Sostituendo questo valore nel supposto integrale della (9), troveremo

$$z_x = \Pi_1^{x-1}(B_i)S_1^{x-1}M_x^{(i)}\int_{\omega'}^{\omega''}F(\omega)e^{\omega y}\omega^{x-i}d\omega.$$

Ma questo integrale si può semplificare ancora di più. Di fatti si ha

$$e^{\omega y}\,\omega^{x-1} = \frac{d.^{x-1}\,e^{\omega y}}{dy^{x-i}}\ ,$$

onde per quello che si è detto antecedentemente sarà

$$\int_{\omega}^{\omega'} F(\omega)e^{\omega y}\,\omega^{x-1}\,d\omega = \int_{\omega}^{\omega'}\frac{d.^{x-1}e^{\omega y}}{dy^{x-i}}\,F(\omega)d\omega = \frac{d.^{x-i}\psi(y)}{dy^{x-1}}\ ,$$

e quindi il valore di z_x sarà dato dalla equazione

$$z_x = \Pi_1^{x-1}(B_i)S_1^{x-1}M_x^{(i)}\frac{d.^{x-1}\psi(y)}{dy^{x-1}} \qquad (11).$$

Per applicare questa formola ad un caso particolare supponiamo che si debba sommare la serie infinita

$$z_x = 1 - xy + \frac{x(x+1)}{2}\,y^2 - \frac{x(x+1)(x+2)}{2.3}\,y^3 + \ \ldots\ldots \quad (12).$$

Ponendo $x+1$ in luogo di x in questa equazione, verrà

$$z_{x+1} = 1 - (x+1)y + \frac{(x+1)(x+2)}{2}\,y^2 - \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{2.3}\,y^3 + \ldots$$

e differenziandola rispetto ad y

$$\frac{dz_x}{dy}=-x+x(x+1)y-\frac{x(x+1)(x+2)}{2}y^2+\ldots$$

Di quì risulta evidentemente

$$-\frac{1}{x}\frac{dz_x}{dy}=1-(x+1)y+\frac{(x+1)(x+2)}{2}y^2-\ldots\ldots=z_{x+1};$$

onde l'equazione a differenze miste, che bisogna integrare per ottener la somma della serie (12), sarà

$$z_{x+1}=-\frac{1}{x}\frac{dz_x}{dy}.$$

Paragonando questa equazione con la (9) si ha

$$A_x=0\,,\quad B_x=-\frac{1}{x}\,;\ \text{e quindi}\ a_x=0\,,\quad S_1^{x-1}M_x^{(i)}=1$$

$$\Pi_1^{x-1}(B_i)=\frac{(-1)^x}{\Gamma(x)}\,,$$

rappresentando con Γ la funzione Euleriana di seconda specie. In conseguenza sostituendo nella (11) si avrà

$$z_x=\frac{(-1)^x}{\Gamma(x)}\cdot\frac{d^x\,\psi(y)}{dy^x}$$

risultando $i=0$.

Per fare un' altra applicazione delle formole precedenti suppongo che si abbia a risolvere il seguente problema. Un solido (S) è tagliato da una serie di piani paralleli ed equidistanti. Nella comune intersezione (C) di uno di questi piani colla superficie del proposto solido si prenda a piacimento un punto (M), e per esso si meni la normale (N) a (C), e si faccia passare un piano (P) perpendicolare a quello della curva suddetta. Sia (C') la comune sezione di (P) colla superficie di (S), e (K) la corda

che sottende l' arco di (C') compreso fra il piano di (C) ed il piano parallelo seguente. Or si suppone che la normale (N) e la corda (K) fanno angoli eguali colla comune intersezione de' piani delle curve (C) e (C'), e si domanda l'equazione della superficie, da cui è terminato il solido (S).

Siano due piani rispettivamente paralleli a quelli delle curve (C), (C') i piani delle coordinate rettangole (y,z), (x,z): è chiaro che la comune intersezione di questi due piani coordinati, ovvero l'asse delle z, riuscirà parallela alla comune sezione de' piani delle curve (C), (C'), ed il problema proposto si riduce a trovare l' equazione della superficie del solido, supponendo che (N) e (K) facciano angoli eguali coll' asse delle z. Posto ciò, se la distanza de' due piani paralleli consecutivi, che tagliano il solido, si pone $=1$, la cotangente dell' angolo che (K) fa coll'asse delle z è evidentemente $\frac{z_{x+1}-z_x}{1}=z_{x+1}-z_x$. La cotangente dell' angolo che (N) fa col medesimo asse è $-\frac{dz_x}{dy}$; onde per le condizioni del problema proposto sarà

$$z_{x+1}=z_x-\frac{dz_x}{dy}$$

l' equazione a differenze miste della superficie di (S). Paragonando questa equazione colla (9) si trova $A_x=1$, $B_x=-1$, e per conseguenza

$$\Omega_x=(1-\omega)^x F(\omega)$$
$$z_x=\int_{\omega'}^{\omega''}(1-\omega)^x e^{\omega y}F(\omega)d\omega.$$

Sviluppando in serie $(1-\omega)^x$, si ottiene

$$z_x=\int_{\omega'}^{\omega''}e^{\omega y}F(\omega)\,d\omega-x\int_{\omega'}^{\omega''}\frac{d.e^{\omega y}}{dy}F(\omega)d\omega+\frac{x(x-1)}{1.2}\int_{\omega'}^{\omega''}\frac{d.^2e^{\omega y}}{dy^2}F(\omega)d\omega$$
$$-\ldots\ldots$$

*

e più semplicemente ancora

$$z_1 = \psi(y) - x\frac{d\psi(y)}{dy} + \frac{x(x-1)}{1.2}\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} - \ldots\ldots$$

supponendo secondo il solito

$$\psi(y) = \int_{\omega'}^{\omega''} e^{\omega y} F(\omega)\, d\omega.$$

Risulta quindi dalla trovata espressione di z_1 che il problema proposto è indeterminato, quando non è data la forma della curva (C).

Se per un caso particolare si suppone essere

$$z_0 = Ay^2 + By + C$$

l'equazione della curva (C) nel caso di $x=0$, la espressione di z_1 cangia in

$$\psi(y) = Ay^2 + By + C.$$

Da questa equazione si deduce

$$\frac{d\psi(y)}{dy} = 2Ay + B\,, \qquad \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} = 2A\,, \qquad \frac{d^3\psi(y)}{dy^3} = 0\,, \ldots\ldots,$$

onde per un qualunque valore di x avremo

$$z = A(y-x)^2 + B(y-x) - Ax + C\,;$$

e questa sarà l'equazione in termini finiti della superficie, da cui è terminato il solido (S).

Se C non è zero, ma invece è funzione della sola x, come sono A, B, la (1), che in questa ipotesi diventa

$$z_{x+1} = A_x z_x + B_x \frac{dz_x}{dy} + C_x \qquad (13),$$

s'integrerà nel modo seguente. Posto

$$z_x = z'_x + N_x\,,$$

rappresentando N_x una funzione incognita della sola variabile x, sarà

$$z_{x+1}=z'_{x+1}+N_{x+1}\,, \qquad \frac{dz_x}{dy}=\frac{dz'_x}{dy}\,.$$

Sostituendo nella proposta equazione avremo

$$z'_{x+1}+N_{x+1}=A_x(z'_x+N_x)+B_x\frac{dz'_x}{dy}+C_x\,;$$

e quindi a cagione di N_x funzione indeterminata

$$\left.\begin{aligned} N_{x+1}&=A_xN_x+C_x\\ z'_{x+1}&=A_xz'_x+B_x\frac{dz'_x}{dy}\,. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Ora l'integrale della prima di quest' equazioni si è, come ognuno sa,

$$N_x=\Pi_1^{x-1}(A_i)\Sigma\,\frac{C_x}{\Pi_1^x(A_i)}\,,$$

rappresentando Σ il segno d'integrazione relativo alle differenze finite; e l'integrale dell' altro è dato dalla equazione (11). Laonde quando A, B, C sono date funzioni della sola variabile x, il completo integrale della (1) sarà

$$z_x=\Pi_1^{x-1}(A_i)\Sigma\,\frac{C_x}{\Pi_1^x(A_i)}+\Pi_1^{x-1}(B_i)S_1^{x-1}M_x(i)\frac{d^{x-i}\psi(y)}{dy^{x-i}} \quad (15).$$

Poniamo per es. che sia data ad integrare l'equazione

$$z_{x+1}=z_x+x\frac{dz_x}{dy}+x^2\,,$$

e sarà

$$A_x=1\,,\quad B_x=x\,,\quad C_x=x^2\,,\quad \Pi_1^{x-1}(A_i)=1$$

$$\Sigma\frac{C_x}{\Pi_1^x(A_i)}=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\,.$$

In conseguenza l'integrale della prima delle (14) sarà

$$N_x=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}$$

o più semplicemente

$$N_x = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2.\ 3}\ .$$

Per ciò che riguarda l'integrale dell'altra osserveremo che essendo $A=1$, $B=x$, sarà

$$\Pi_1^{x-1}(B_i)S_1^{x-1}M_x^{(i)}\omega^{x-i}=(\omega+1)(2\omega+1)(3\omega+1)\ \ldots\ ((x-1)\omega+1)$$

$$=\omega^{x-1}\left[\frac{1}{\omega}+1\right]\left[\frac{1}{\omega}+2\right]\left[\frac{1}{\omega}+3\right]\ \ldots\ \left[\frac{1}{\omega}+x-1\right].$$

Ma sappiamo, che essendo in generale

$$\int c^{-\beta}\,\beta^{q-1}\,d\beta=\frac{1}{q}\,\beta^q\,c^{-\beta}+\frac{1}{q}\int c^{-\beta}\,\beta^q\,d\beta\,,$$

se questa integrazione si esegue fra i limiti $\beta=0$, $\beta=\infty$, a cagione di $\beta^q\,c^{-\beta}=0$, si ha

$$\int_0^\infty c^{-\beta}\,\beta^{q-1}\,d\beta=\frac{1}{q}\int_0^\infty c^{-\beta}\,\beta^q\,d\beta$$

o più semplicemente

$$\Gamma(q)=\frac{1}{q}\,\Gamma(q+1)\,,$$

e quindi

$$\Gamma(q+1)=\frac{1}{q+1}\,\Gamma(q+2)\,,$$

$$\Gamma(q+2)=\frac{1}{q+2}\,\Gamma(q+3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Gamma(q+h-1)=\frac{1}{q+h-1}\,\Gamma(q+h).$$

In conseguenza sarà

$$\Gamma(q+h)=q(q+1)(q+2)\ \ldots\ (q+h-1)\Gamma(q).$$

Ponendo $q=\frac{1}{\omega}$, $h=x$, questa equazione si cangia in

$$\Gamma\left[\frac{1}{\omega}+x\right]=\frac{1}{\omega}\left[\frac{1}{\omega}+1\right]\left[\frac{1}{\omega}+2\right]\ldots\ldots\left[\frac{1}{\omega}+x-1\right]\Gamma\left[\frac{1}{\omega}\right];$$

e quindi dividendo per $\frac{1}{\omega}\Gamma\left(\frac{1}{\omega}\right)$ verrà

$$\left[\frac{1}{\omega}+1\right]\left[\frac{1}{\omega}+2\right]\left[\frac{1}{\omega}+3\right]\ldots\ldots\left[\frac{1}{\omega}+x-1\right]=\frac{\omega\Gamma\left[\frac{1}{\omega}+x\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{\omega}\right]}.$$

Finalmente moltiplicando questa equazione per ω^{x-1}, sarà

$$\Pi_1^{x-1}(B_i)\,S_1^{x-1}\,M_x^{(i)}\,x^{\omega-i}=\frac{\omega^x\,\Gamma\left[\frac{1}{\omega}+x\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{\omega}\right]},$$

e però l' integrale completo della proposta sarà

$$z_x=\frac{x(x-1)(2x-1)}{2.3}+\int_{\omega'}^{\omega''}\frac{\omega_x\,\Gamma\left[\frac{1}{\omega}+x\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{\omega}\right]}e^{\omega y}F(\omega)\,d\omega,$$

e più semplicemente ancora

$$z_x=\frac{x(x-1)(2x-1)}{2.3}+\int_{\omega'}^{\omega''}\frac{\Gamma\left[\frac{1}{\omega}+x\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{\omega}\right]}\cdot\frac{d^x\,.\,e^{\omega y}}{dy^x}F(\omega)\,d\omega$$

Cerchiamo da ultimo il metodo da seguire nella integrazione della (1), quando i coefficienti A, B, C sono funzioni di entrambe le variabili x, y. A tal fine rappresentino u_x, v_x due funzioni arbitrarie di coteste variabili, e posto

$$z_x=u_x\,v_x\,,$$

sarà evidentemente

$$z_{x+1}=u_{x+1}\,v_{x+1}\,,\quad \frac{dz_x}{dy}=v_x\frac{du_x}{dy}+u_x\frac{dv_x}{dy}.$$

Questi valori sostituiti nella (1) danno

$$u_{x+1}\, v_{x+1} = A u_x\, v_x + B\left[v_x \frac{du_x}{dy} + u_x \frac{dv_x}{dy}\right] + C \qquad (16);$$

onde a cagione delle funzioni arbitrarie u_x, v_x, potrà questa equazione scindersi nelle altre due

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A u_x + B \frac{du_x}{dy} \\ v_{x+1} &= \frac{B u_x}{u_{x+1}} \cdot \frac{dv_x}{dy} + \frac{C}{u_{x+1}} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

La prima di quest' equazioni essendo equazione a differenziali parziali, avrà per integral completo

$$u_x = F(x) e^{-\int \frac{A}{B} dy}$$

Se non che bastando conoscere un valore particolare di u_x, per avere con tutta la generalità quello di z_x, poichè il valore di v_x deve contenere necessariamente una funzione arbitraria, noi scriveremo più semplicemente

$$u_x = e^{-\int \frac{A}{B} dy} = e^{-Y_x},$$

e quindi sarà

$$u_{x+1} = e^{-Y_{x+1}}$$

Sostituendo questi valori nella seconda dell' equazioni (17) troveremo

$$v_{x+1} = B e^{\Delta Y_x} \cdot \frac{dv_x}{dy} + C e^{Y_{x+1}} \qquad (18),$$

ponendo per brevità $\Delta Y_{x+1} = Y_{x+1} - Y_x$. Questa equazione darà v_x, e così il problema sarà completamente risoluto.

L' equazione (18) non ancora si è potuta integrare nella sua generalità. Vi sono non per tanto alcuni casi,

nei quali se ne può ottenere l' integrale in termini finiti, e sarà utile occuparcene in questo luogo. Sia primieramente

$$Be^{\Delta Y_x} = 1 ,$$

e la (18) diventerà

$$v_{x+1} = \frac{dv_x}{dy} + Ce^{Y_{x+1}} .$$

Poniamo adesso

$$v_x = \frac{d^x \Omega_x}{dy^x} ;$$

e risultando in questa ipotesi

$$v_{x+1} = \frac{d^{x+1} \Omega_{x+1}}{dy^{x+1}} , \quad \frac{dv_x}{dy} = \frac{d^{x+1} \Omega_x}{dy^{x+1}} ,$$

avremo

$$\frac{d^{x+1} \Omega_{x+1}}{dy^{x+1}} = \frac{d^{x+1} \Omega_x}{dy^{x+1}} + Ce^{Y_{x+1}} ;$$

ovvero, posto

$$\Delta_x \Omega_x = \Omega_{x+1} - \Omega_x ,$$

sarà più semplicemente

$$\frac{d^{x+1} \Delta_x \Omega_x}{dy^{x+1}} = Ce^{Y_{x+1}} .$$

Integrando questa equazione rispetto alla differenziale dy, si avrà

$$\Delta_x \Omega_x = \int^{x+1} Ce^{Y_{x+1}} dy^{x+1} ;$$

ed in seguito integrando rispetto alla differenza finita, verrà

$$\Omega_x = \Sigma_x \int^{x+1} Ce^{Y_{x+1}} dy^{x+1} + F(y) ,$$

ove si aggiugne la funzione arbitraria $F(y)$, perchè l' in-

tegrale finito si prende rispetto ad x nella ipotesi di y costante. Di qui poi risulta

$$v_x = \frac{d^x \Omega_x}{dy^x} = \frac{d^x F(y)}{dy^x} + \frac{d^x \Sigma_x \int^{x+1} Ce^{Y_{x+1}} dy^{x+1}}{dy^x},$$

ed il cercato valore di z_x sarà

$$z_x = e^{-Y_x} \cdot \frac{d^x F(y)}{dy^x} + e^{-Y_x} \cdot \frac{d^x \Sigma_x \int^{x+1} Ce^{Y_{x+1}} dy^{x+1}}{dy^x} \quad (19).$$

La supposizione di $Be^{\Delta Y_x} = 1$ importa che tra i coefficienti A, B della proposta equazione (1) esista una certa relazione. Per porla in evidenza, risolveremo logaritmicamente l'equazione $Be^{\Delta Y_x} = 1$, e verrà

$$\Delta Y_x + \log B = 0;$$

e poscia ponendo in luogo di ΔY_x il suo valore, sarà

$$\int \left(\frac{A_{x+1}}{B_{x+1}} - \frac{A_x}{B_x} \right) dy + \log B_x = 0.$$

Finalmente differenziando rispetto ad y, e liberando dai fratti l'equazione risultante, avremo

$$A_{x+1} B_x - A_x B_{x+1} + B_{x+1} \frac{dB_{x+1}}{dy} = 0. \quad (20)$$

Dunque tutte le volte che i coefficienti A, B della proposta equazione (1) soddisfanno alla (20), l'integrale di quella equazione sarà dato dalla (19).

Supponiamo per un caso particolare che voglia sommarsi la serie infinita

$$z_x = \frac{e^{xy}}{x+1} + \frac{e^{(x+1)y}}{(x+2)^2} + \frac{e^{(x+2)y}}{(x+2)^3} + \cdots \cdots \quad (21)$$

Ponendo $x+1$ in luogo di x in questa serie, verrà

$$z_{x+1} = \frac{e^{(x+1)y}}{x+2} + \frac{e^{(x+2)y}}{(x+3)^2} + \ldots,$$

e conseguentemente

$$z_{x+1} + e^{xy} = e^{xy} + \frac{e^{(x+1)y}}{x+2} + \frac{e^{(x+2)y}}{(x+3)^2} + \ldots \qquad (22)$$

Ma differenziando la proposta serie rispetto ad y si ottiene

$$\frac{dz_x}{dy} = \frac{xe^{xy}}{x+1} + \frac{(x+1)e^{(x+1)y}}{(x+2)^2} + \frac{(x+2)e^{(x+2)y}}{(x+3)^3} + \ldots;$$

onde verrà

$$z_x + \frac{dz_x}{dy} = e^{xy} + \frac{e^{(x+1)y}}{x+2} + \frac{e^{(x+2)y}}{(x+3)^2} + \ldots$$

Essendo adunque il secondo membro di questa equazione identico con quello della (22), sarà

$$z_{x+1} + e^{xy} = z_x + \frac{dz_x}{dy};$$

e quindi bisognerà integrare l' equazione a differenze miste

$$z_{x+1} = z_x + \frac{dz_x}{dy} - e^{xy} \qquad (23)$$

per ottenere la somma della serie (21).

Paragonando questa equazione colla (1) troveremo $A_x = 1$, $B_x = 1$, $C_x = -e^{xy}$; e però risultando $A_{x+1} = 1$, $B_{x+1} = 1$, $\frac{dB_x}{dy} = 0$, sarà soddisfatta l' equazione di condizione (20). Inoltre essendo

$$Y_x = y, \qquad e^{Yx+1} = e^y,$$

sarà evidentemente

$$Ce^{Yx} = -e^{y(x+1)},$$

e l' equazione (19) diventerà

*

$$z_x = e^{-y}\left\{\frac{d^x F(y)}{dy^x} - \frac{d.^x \Sigma_x \int^{x+1} e^{(x+1)y}\, dy^{x+1}}{dy^x}\right\}$$

Ora si ha per le note regole di Calcolo Integrale

$$\int^{x+1} e^{(x+1)y}\, dy^{x+1} = \frac{e^{(x+1)y}}{(x+1)^{x+1}};$$

onde risulterà

$$\Sigma_x \int^{x+1} e^{(x+1)y}\, dy^{x+1} = \Sigma_x \frac{e^{(x+1)y}}{(x+1)^{x+1}}.$$

Non potendosi ottenere in termini finiti il valore di questo integrale, sarà la funzione cercata

$$z_x = e^{-y}\left\{\frac{d^x F(y)}{dy^x} - \frac{d^x . \Sigma_x (x+1)^{-(x+1)} e^{(x+1)y}}{dy^x}\right\}.$$

Ritornando alla equazione (18) supponiamo in secondo luogo che sia

$$Ce^{Y_{x+1}} = M = \text{costante}.$$

Posto $v_x = v'_x + M$, avremo

$$v_{x+1} = v'_{x+1} + M, \quad \frac{dv_x}{dy} = \frac{dv'_x}{dy}$$

Sostituendo nella (18) troveremo,

$$v'_{x+1} + M = Be^{\Delta Y_x}\frac{dv'_x}{dy} + M,$$

ovveramente

$$v'_{x+1} = K_x \frac{dv'_x}{dy},$$

ponendo per maggiore semplicità $K_x = Be^{\Delta Y_x}$. Poniamo successivamente in questa equazione

$$x = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots, x-1,$$

e verrà

$$v'_1 = R_0 \frac{dv'_0}{dy}\ ; \quad v'_2 = R_1 \frac{dv'_1}{dy}\ ; \quad v'_3 = R_2 \frac{dv'_2}{dy}\ ; \ \ldots .$$

Se dunque faremo

$$\frac{dv'_0}{dy} = F(y)\,,$$

si avrà evidentemente

$$v'_1 = K_0 F(y)\ ; \qquad v'_2 = \frac{K_1 d.K_0 F(y)}{dy}\ ; \qquad v'_3 = \frac{K_2 d.K_1 d.K_0 F(y)}{dy^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

e finalmente

$$v'_x = \frac{K_{x-1} d.K_{x-2} d.K_{x-3} d.\ldots\ldots\ldots K_0 F(y)}{dy^{x-1}}\ ;$$

onde il cercato valore di v_x sarà

$$v_x = M + \frac{K_{x-1} d.K_{x-2} d.K_{x-3} d.\ldots\ldots K_0 F(y)}{dy^{x-1}}\,.$$

Che se K_x risulta funzione di una sola delle variabili x, y, il valore di v'_x si potrà più semplicemente ottenere per mezzo degl' integrali definiti, come si è fatto valere precedentemente. Anzi quando K_x è funzione della sola x, risultando

$$\frac{dK_x}{dy} = 0\,,$$

il valore di v_x sarà

$$v_x = M + K_0 K_1 K_2 \ldots\ldots K_{x-1} \frac{d^{x-1} F(y)}{dy^{x-1}}\,.$$

A fine di applicare questa teorica ad un caso particolare, supponiamo che debbasi integrare l' equazione

$$z_{x+1} = \frac{x}{y} z_x + y \frac{dz_x}{dy} + 2e^{\frac{x+1}{y}}\,.$$

Essendo in questa ipotesi $A = \frac{x}{y}$, $B = y$, $C = 2e^{\frac{x+1}{y}}$, sarà

$$Y_x = \int \frac{A}{B} dy = x \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{x}{y} \; ; \qquad Y_{x+1} = -\frac{x+1}{y} \; ; \qquad \Delta Y_x = -\frac{1}{y} \, ,$$

e conseguentemente

$$M = Ce^{Y_{x+1}} = 2e^{\frac{x+1}{y}} e^{-\frac{x+1}{y}} = 2 \; ; \qquad K^x = Be^{\Delta Y_x} = ye^{-\frac{1}{y}} \; ;$$

e però il valore di v'_x dipenderà dalla integrazione dell'equazione

$$v'_{x+1} = ye^{-\frac{1}{y}} \frac{dv'_x}{dy} .$$

Paragonando questa equazione con la (2) si ha

$$A_y = 0 \, , \qquad B_y = ye^{-\frac{1}{y}} \, ,$$

e quindi sarà

$$Y = 0 \, , \qquad Y' = \int \frac{dy}{B} = \int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \, ;$$

onde sostituendo questi valori nella (6) troveremo

$$v'_x = \frac{d^x . \psi \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right]}{d \left[\int e^{\frac{1}{y}} \frac{dy}{y} \right]^x} \; \frac{d \left[\int e^{\frac{1}{y}} \frac{dy}{y} \right]^x}{dy^x} .$$

Trovato questo valore di v'_x, si avrà quello di v_x dalla equazione

$$v'_x = 2 + \frac{d^x . \psi \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right]}{d \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right]^x} \; \frac{d \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}} dy}{y} \right]^x}{dy^x}$$

Ma abbiamo detto dover essere $z_x = u_x\, v_x$, ed in questa ipotesi risulta

$$u_x = e^{\frac{1}{y}}$$

In conseguenza sarà

$$z_x = e^{\frac{1}{y}} \left\{ 2 + \frac{d^x \cdot \psi \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}}\, dy}{y} \right]}{d \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}}\, dy}{y} \right]^x} \; \frac{d \left[\int \frac{e^{\frac{1}{y}}\, dy}{y} \right]^x}{dy^x} \right\}.$$

§. II.°

Equazioni a differenze miste lineari del prim' ordine, e fra tre o più variabili indipendenti.

L' equazioni a differenze miste lineari del prim' ordine fra tre variabili indipendenti x, y, u non possono ridursi che ad una delle seguenti forme

$$\left. \begin{aligned} z_{x+1} &= Az + B\frac{dz}{dy} + C\frac{dz}{du} + D \\ z_{x+1} &= Az + Bz_{y+1} + C\frac{dz}{du} + D \end{aligned} \right\} \quad (1);$$

rappresentando A, B, C, D date funzioni delle tre variabili suddette. Supponiamo primieramente che voglia integrarsi la prima di quest' equazioni, ed in essa sia $D=0$, ed A, B, C funzioni di y, u senza x, per modo che abbiasi

$$z_{x+1} = Az + B\frac{dz}{dy} + C\frac{dz}{du} \qquad (2).$$

Se si suppone che l' integrale di questa equazione sia

$$z=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega\omega^x\,d\omega \qquad (3),$$

e che Ω rappresenti una incognita funzione di y, u, ω, sarà

$$z_{x+1}=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega\omega^{x+1}d\omega\ ,\quad \frac{dz}{dy}=\int_{\omega'}^{\omega''}\frac{d\Omega}{dy}\omega^x\,d\omega\ ,\quad \frac{dz}{du}=\int_{\omega'}^{\omega''}\frac{d\Omega}{du}\omega^x\,du\ .$$

Riducendo a zero l' equazione (2), e sostituendovi questi valori, troveremo

$$o=\int_{\omega'}^{\omega''}\omega^x\,d\omega\left\{(A-\omega)\Omega+B\frac{d\Omega}{dy}+C\frac{d\Omega}{du}\right\},$$

nella quale si soddisfa supponendo

$$o=(A-\omega)\Omega+B\frac{d\Omega}{dy}+C\frac{d\Omega}{du}\ ,$$

ovveramente supponendo

$$o=A-\omega+B\frac{d\,.\log\Omega}{dy}+C\frac{d\,.\log\Omega}{du}\ .$$

Quindi se si fa

$$\log\Omega=W,$$

l' equazione a differenziali parziali, che dovrà esser soddisfatta per la soluzione del proposto problema, sarà

$$o=A-\omega+B\frac{dW}{dy}+C\frac{dW}{du} \qquad (4).$$

Ora si sa, che ponendo

$$\left.\begin{aligned} BdW-(\omega-A)dy&=o\\ Bdu-Cdy&=o\end{aligned}\right\} \qquad (5),$$

e rappresentando per $W-T$, V gl' integrali di queste due equazioni, si ha

$$W=T+\log.F(U\ ,\ \omega)\ ,$$

poichè quest' integrali si prendono supponendo ω costante.

In conseguenza sarà

$$\Omega = e^{W} = e^{T} F(U, \omega).$$

Sostituendo questo valore di Ω nella equazione (3), si avrà pel cercato valore di z

$$z = \int_{\omega'}^{\omega''} F(U, \omega) e^{T} \omega^{x} d\omega \qquad (6).$$

Supponiamo per un caso particolare A, B, C funzioni della sola variabile y : è chiaro che gl' integrali delle (5) saranno in questa ipotesi

$$W - \omega \int \frac{dy}{B} + \int \frac{A}{B} dy = W - \omega Y' + Y$$

$$u - \int \frac{C}{B} dy = u - Y''.$$

Sarà dunque in questo caso

$$\Omega = e^{-Y + \omega Y'} F(u - Y'', \omega),$$

e la (6) diventerà

$$z = e^{-Y} \int_{\omega'}^{\omega''} F(u - Y'', \omega) e^{\omega Y'} \omega^{x} d\omega.$$

Se si suppone che la variabile x debba essere un numero intero $>$o, sarà, come dianzi abbiamo osservato

$$\frac{d^{x} e^{\omega Y'}}{dY'^{x}} = e^{\omega Y'} \omega^{x};$$

onde sostituendo nel trovato integrale verrà

$$z = e^{-Y} \int_{\omega'}^{\omega''} F(u - Y'', \omega) \frac{d.^{x} e^{\omega Y'}}{dY'^{x}} d\omega,$$

ed anche più semplicemente

$$z = e^{-Y} \frac{d.^{x} \int_{\omega'}^{\omega''} F(u - Y'', \omega) e^{\omega Y'} . d\omega}{dY'^{x}},$$

purchè però nell' eseguire le differenziazioni rispetto ad Y' si consideri $u-Y''$ come costante. Adunque essendo

$$\int_{\omega'}^{\omega''} F(u-Y'',\, \omega)e^{\omega Y'}d\omega = \psi(u-Y'',\, Y'),$$

sarà il cercato valore di z definito per l' equazione

$$z=e^{-Y}\frac{d^x\,.\,\psi(u-Y'',\, Y')}{dY'^x} \qquad (7),$$

purchè nell' eseguire le differenziazioni si riguardi $u-Y''$ come quantità costante.

Quando A, B, C sono quantità costanti, si ha evidentemente

$$Y=\frac{A\,.\,y}{B},\quad Y'=\frac{y}{B},\quad Y''=\frac{C\,.\,y}{B},\quad dY'=B^{-1}dy.$$

Ponendo questi valori nella (7) verrà

$$z=e^{-\frac{A.y}{B}}B^x\frac{d^x\,.\,\psi(Bu-Cy,\, y)}{dy^x},$$

avvertendo sempre che le differenziazioni si debbono eseguire supponendo $Bu-Cy$ come quantità costante. A questo medesimo risultamento è pervenuto il Paoli per mezzo di considerazioni tutte diverse dalle nostre, come può vedersi nel citato suo Opuscolo (*).

Con un ragionamento tutto simile al precedente troveremo che l'integrale completo dell' equazione del prim' ordine

$$z_{x+1}=Az+B\frac{dz}{dy}+C\frac{dz}{du}+D\frac{dz}{dv}+\ldots\ldots \quad (8)$$

tra un numero qualunque di variabili x, y, u, v, ... si avrà per la equazione

(*) V. il §. 25.

$$z = \int_{\omega'}^{\omega''} F(U, V, \ldots \omega) e^{T} \omega^{x} d\omega \qquad (9)$$

purchè A, B, C, D .... siano funzioni di y, u, v, ... senza x, e se, posto

$$\log \Omega = W,$$

si suppone che $W-T$, U, V, ... siano gl' integrali dell' equazioni differenziali simultanee

$$\begin{array}{l} BdW-(\omega-A)dy=0 \\ Bdu - Cdy \quad = 0 \\ Bdv - Ddy \quad = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Quindi se per una particolare ipotesi supponiamo che A, B, C, D, ... siano funzioni della sola y, sarà

$$z = e^{-Y} \frac{d^x . \psi(u-Y'', v-Y''', \ldots, Y')}{dY'^x}$$

ciò che diventa la (9), purchè le differenziazioni si eseguiscano supponendo costanti $u-Y''$, $v-Y'''$, ...
Che se invece supponiamo che A, B, C, D, ... sono quantità costanti, verrà

$$z = e^{-\frac{Ay}{B}} B^x . \frac{d^x . \psi(Bu-Cy, Bv-Dy, \ldots, y)}{dy^x}.$$

Cerchiamo adesso l' integrale della (2), supponendo che A, B, C siano funzioni della sola variabile x. Poniamo a tal fine

$$z = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_x e^{(u+\beta y)\omega} d\omega,$$

e sia la quantità β una costante arbitraria, ed Ω una funzione arbitraria di ω ed x. Ponendo $x+1$ in luogo di x in questa equazione, avremo

*

$$z_{x+1}=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega_{x+1}\,e^{(u+\beta y)\omega}\,d\omega\;;$$

e differenziando la medesima equazione successivamente rispetto ad x ed y, verrà

$$\frac{dz}{du}=\int_{\omega'}^{\omega''}\omega\Omega_x\,e^{(u+\beta y)\omega}\,d\omega$$
$$\frac{dz}{dy}=\int_{\omega'}^{\omega''}\beta\omega\Omega_x\,e^{(u+\beta y)\omega}\,d\omega.$$

Sostituendo tutti questi valori nella (2) dopo di averla ridotta a zero, troveremo

$$0=\int_{\omega'}^{\omega''}e^{(u+\beta y)\omega}\,d\omega\left\{\Omega_{x+1}-\Omega_x\left(A+\omega(B\beta+C)\right)\right\}.$$

A questa equazione si soddisfa ponendo

$$\Omega_{x+1}-\Omega_x\left(A+\omega(B\beta+C)\right)=0\,,$$

onde la soluzione di questo problema rientra in quella di un problema già proposto nel §. precedente. Lo stesso vale per l' equazione (3) quando A, B, C, D, ... sono funzioni della sola variabile x.

Finalmente supponiamo che nella (2) i coefficienti A, B, C siano funzioni di x, e di un' altra sola delle due rimanenti variabili y, u, per esempio di y. Posto

$$z=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega_x\,e^{\omega u}\,d\omega\,,$$

e rappresentando Ω_x una indeterminata funzione di x ed y, si avrà

$$z_{x+1}=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega_{x+1}\,e^{\omega u}d\omega\,,\quad \frac{dz}{dy}=\int_{\omega'}^{\omega''}\frac{d\Omega_x}{dy}\,e^{\omega u}\,d\omega$$
$$\frac{dz}{du}=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega_x\,e^{\omega u}\omega\,d\omega.$$

Sostituendo questi valori nella (2), si avrà per determinare Ω_x la seguente equazione a differenze miste e fra due variabili indipendenti

$$\Omega_{x+1} = (A + C\omega)\Omega_x + B\frac{d\Omega_x}{dy}.$$

In conseguenza il problema si riduce a quanto abbiamo detto nel §. 1.°. E questo canone si può estendere anche all' equazione (8), purchè A, B, C, D, ... siano funzioni di x e di un' altra medesima variabile y, u, v, ...

Quando però nella (2) i coefficienti A, B, C contengono le tre variabili x, y, u, si può dire che la sua integrazione riesce ineseguibile, ove si prenda a trattarla nella sua generalità. Non sempre così accade ne' casi particolari, uno più specioso de' quali è il seguente. Sia nella (2) A funzione della sola variabile x, e B, C funzioni delle altre due variabili y, u. Se si suppone

$$\left.\begin{aligned} dU &= \mu(Bdu - Cdy) \\ z &= \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_x e^{\omega U} d\omega \end{aligned}\right\} \quad (10),$$

avremo manifestamente

$$z_{x+1} = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_{x+1} e^{\omega U} d\omega \; ; \qquad \frac{dz}{dy} = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_x e^{\omega U} \frac{dU}{dy} \omega dx$$

$$\frac{dz}{du} = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega_x e^{\omega U} \frac{dU}{du} \omega d\omega.$$

Sostituendo questi valori nella (2), troveremo riducendo a zero questa equazione

$$0 = \int_{\omega'}^{\omega''} e^{\omega U} d\omega \left\{ \Omega_{x+1} - A_x \Omega_x + \left(B\frac{dU}{dy} + C\frac{dU}{du} \right) \Omega_x \omega \right\},$$

la quale importa che sia

$$0=\Omega_{x+1}-A_x\Omega_x+\left(B\frac{dU}{dy}+C\frac{dU}{du}\right)\Omega_x\,\omega. \qquad (11).$$

Ma essendo

$$dU=\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{du}du,$$

il paragone di questa equazione con la prima delle (10) porge

$$\frac{dU}{dy}=-\mu C\ , \qquad \frac{dU}{du}=\mu B;$$

onde sarà

$$B\frac{dU}{dy}+C\frac{dU}{du}=0,$$

e la (11) si cangerà in

$$\Omega_{x+1}-A_x\Omega_x=0.$$

Integrando questa equazione si trova

$$\Omega_x=\Pi_1^{x-1}(A_i)\,F(\omega);$$

onde sostituendo nella seconda delle (10) avremo

$$z=\Pi_1^{x-1}(A_i)\int_{\omega'}^{\omega''}F(\omega)e^{\omega U}d\omega,$$

ed ancora più semplicemente

$$z=\Pi_1^{x-1}(A_i)\,\psi(U) \qquad (12)$$

Supponiamo per un caso particolare

$$A=x(x+1)\,,\qquad B=y\,,\qquad C=u\,,$$

e sarà

$$Bdu-Cdy=ydu-udy.$$

Il fattore μ che rende differenziale esatto questo binomio si è

$$\mu=\frac{1}{y^2+u^2};$$

onde

$$dU=\frac{ydu-udy}{y^2+u^2},$$

e conseguentemente avremo

$$U = \text{arc.}\left(\text{tg.} = \frac{u}{y}\right).$$

Inoltre si ha

$$\Pi_1^{x-1}(A_t) = (1.2.3\ldots(x-1))(1.2.3\ldots(x-1)x) = \Gamma(x)\Gamma(x+1) = x\Gamma^2(x)$$

Sostituendo nella (12), troveremo che l'integrale completo dell' equazione a differenze miste

$$z_{x+1} = x(x+1)z_x + y\frac{dz_x}{dy} + u\frac{dz_x}{du}$$

vien dato dalla formola

$$z_x = x\Gamma^2(x)\varphi\left[\text{arc.}\left(\text{tag.} = \frac{u}{y}\right)\right].$$

Sino ad ora abbiamo supposto $D=0$ nella prima dell' equazioni (1). Quando ciò non ha luogo, e D è funzione di una sola delle variabili x, y, u, si è mostrato nel §. 1.° come questo termine si debba far disparire dalla (1). Nè grave difficoltà s' incontra nel far libera la suddetta equazione da esso, quando D è funzione delle due variabili y, u. Perciocchè posto

$$z = z' + M,$$

e rappresentando con M una incognita funzione di y, u, si ha

$$z_{x+1} = z'_{x+1} + M; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz'}{dy} + \frac{dM}{dy}; \quad \frac{dz}{du} = \frac{dz'}{du} + \frac{dM}{du}.$$

Sostituendo questi valori nella (1) segnata in primo luogo risulta

$$z'_{x+1}\,M = A(z'+M) + B\left[\frac{dz'}{dy} + \frac{dM}{dy}\right] + C\left[\frac{dz'}{du} + \frac{dM}{du}\right] + D,$$

equazione la quale si può scindere nelle due seguenti

$$o=D+(A-1)M+B\frac{dM}{dy}+C\frac{dM}{du} \qquad (13),$$

$$z'_{x+1}=Az'+B\frac{dz'}{dy}+C\frac{dz'}{du}.$$

L' integrazione della seconda di quest' equazioni si riduce alle cose dette sinora. Per ciò che riguarda la prima, è chiaro che posto

$$BdM+(M(A-1)+D)dy=o$$
$$Bdu-Cdy=o,$$

e rappresentando con T, U gl' integrali di queste due equazioni differenziali simultanee, si avrà per determinare M l' equazione

$$T=f(U),$$

rappresentando f una funzione arbitraria. Però vuolsi avvertire che per la soluzione del problema basta l' integrale particolare della equazione (13). Che se A, B, C, D fossero funzioni non più delle due variabili y, u, ma sibbene di una sola e medesima di queste variabili, e della variabile x, la determinazione della funzione, che fa svanire D dalla (1) scritta in primo luogo si ridurrebbe ad integrare una equazione della forma della (1) considerata nel §. 1.°. Finalmente quando D è funzione delle tre variabili x, y, u, non si può far disparire dalla equazione proposta senza evitare la difficoltà di dover integrare un altra equazione della stessa forma. In questo caso bisogna tentare con altri metodi l' integrazione della proposta equazione (1), ed il lodato Geometra Italiano ha mostrato come vi si perviene in qualche caso particolare (*).

A compimento di questa teorica rimane a vedere co-

(*) V. l' Opuscolo citato, §§. 37 e 38.

me si debba procedere alla integrazione della (1) scritta in secondo luogo. Sia primieramente $D=0$, ed A, B, C funzioni della sola variabile u. Posto che Ω rappresenti una funzione incognita di u ed ω, e

$$z=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega\omega^{x+\beta y}\,d\omega\,,$$

si avrà manifestamente

$$z_{x+1}=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega\omega^{x+1+\beta y}\,d\omega\,,\quad z_{y+1}=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega\omega^{x+\beta y+\beta}\,d\omega$$

$$\frac{dz}{du}=\int_{\omega'}^{\omega''}\frac{d\Omega}{du}\,\omega^{x+\beta y}\,d\omega.$$

Sostituendo questi valori nella equazione

$$z_{x+1}=Az+Bz_{y+1}+C\frac{dz}{du}\qquad(14),$$

alla quale si riduce la (1) scritta in secondo luogo nel supposto di $D=0$, risulta

$$0=\int\omega^{x+\beta y}\,d\omega\left\{(\omega-A-B\omega^{\beta})\,\Omega-C\frac{d\Omega}{du}\right\},$$

alla quale si soddisfa ponendo

$$0=(\omega-A-B\omega^{\beta})\,\Omega-C\frac{d\Omega}{du}\,.$$

E poichè l' integrale di questa equazione si è

$$\Omega=F(\omega)e^{\int\left(\frac{\omega-A-B\omega^{\beta}}{C}\right)du}\,,$$

si avrà pel completo integrale della (14)

$$z=\int_{\omega'}^{\omega''}e^{\int\left(\frac{\omega-A-B\omega^{\beta}}{C}\right)du}\,F(\omega)\omega^{x+\beta y}\,d\omega$$

Posto per brevità

$$\int \frac{A}{C}\,du = U\,;\quad \int \frac{du}{C} = U'\,;\quad \int \frac{B}{C}\,du = U''\,,$$

questa equazione si cangia in

$$z = e^{-U} \int_{\omega'}^{\omega''} F(\alpha)\, e^{\omega(U' + U''\omega^{\beta-1})}\, \omega^{x+\beta y}\, d\omega \qquad (15).$$

Quando x ad y sono variabili discontinue e debbono rappresentare numeri interi >0, si può eliminare ω da questa equazione nel seguente modo. Si ha evidentemente

$$\frac{d^{x+y}\,.\,e^{\omega U' + \omega\beta U''}}{dU'^x\, dU''^y} = e^{\omega U' + \omega\beta U''}\, \omega^{x+\beta y}\,;$$

onde la (15) si traduce in

$$z = e^{-U} \int_{\omega'}^{\omega''} F(\alpha)\, \frac{d^{x+y}\,.\,e^{\omega U' + \omega\beta U''}}{dU'^x\,.\,dU''^y}\, d\alpha.$$

Adesso si osservi che essendo β una costante arbitraria, la quale non ha relazione nessuna con $F(\alpha)$, si può supporre $\beta = 1$, e viene

$$z = e^{-U} \int_{\omega'}^{\omega''} F(\alpha)\, \frac{d^{x+y}\,.\,e^{\omega(U' + U'')}}{dU'^x\,.\,dU''^y}\, d\alpha\,;$$

e quindi ponendo mente a quanto si è fatto osservare nel principio del §. 1.° sarà

$$z = e^{-U}\, \frac{d^{x+y}\,.\,\psi(U' + U'')}{dU'^x\,.\,dU''^y} \qquad (16).$$

Supponendo per un caso particolare A, B, C quantità costanti, troveremo

$$z = e^{-\frac{Au}{B}}\, C^{2u}\, B^{-u}\, \frac{d^{x+y}\,\psi(u)}{du^{x+y}} \qquad (17).$$

Siano adesso A, B, C funzioni di x, y senza u nella

equazione (14). Posto che Ω rappresenti una funzione incognita di x, y, ω, sia

$$z=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega e^{\omega u}\,d\omega \qquad (18),$$

e verrà

$$z_{x+1}=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega_{x+1}\,e^{\omega u}\,d\omega\,; \qquad z_{y+1}=\int_{\omega'}^{\omega''}\Omega_{y+1}\,e^{\omega u}\,d\omega$$

$$\frac{dz}{du}=\int_{\omega}^{\omega}\Omega e^{\omega u}\,\omega d\omega.$$

Sostituendo questi valori nella (14), verrà

$$0=\int_{\omega}^{\omega} e^{\omega u}\,d\omega\left\{\Omega_{x+1}-B\Omega_{y+1}-(A+C\omega)\Omega\right\},$$

equazione alla quale si soddisfa, ponendo

$$0=\Omega_{x+1}-B\Omega_{y+1}-(A+C\omega)\Omega \qquad (19).$$

Integrando questa equazione a differenze parziali e finite, avremo Ω, e quindi z mercè l' equazione (18). Ma l' integrazione suddetta è impossibile, quando s' intraprende nella sua generalità.

Supponiamo nuovamente A, B, C quantità costanti. In questo caso l' equazione (19) è integrabile, e paragonata coll' equazione

$$0=\Omega_{x+1}-a\Omega-b\Omega_{y+1} \qquad (20)$$

si ha $a=A+C\omega$, $b=B$. Ma Lagrangia ha trovato che l' integrale della (20) si è

$$\Omega=\frac{(-a)^{x+y}}{b^y}\,\Delta^x\,.\,F^y(\omega)\,;$$

onde sarà pel caso nostro

$$\Omega=\frac{(A+C\omega)^{x+1}}{B^y}\,(-1)^{x+1}\,.\,\Delta^x\,.\,F^y(\omega)\,;$$

e l' integrale della (14) nel supposto di A, B, C costanti avrà anche per espressione

$$z=(-1)^{x+1}B^{-y}\int_{\omega}^{\omega}(A+C\omega)^{x+y}e^{\omega u}\Delta^{x}\,.\,F^{y}(\omega)\,d\omega$$

ERRORI				CORREZIONI
Pag. 333.	verso	3.	eguali	*leggi* complementari
	id.	13.	eguali	complementari
	id.	16.	cotangente	tangente

IL GIUDIZIO UNIVERSALE

DIPINTO A FRESCO

NELLA CONA DELLA CAPPELLA SISTINA

DA MICHELANGELO BUONARROTI

MEMORIA

letta all' Accademia nella tornata de' 16 Novembre 1851

DAL SOCIO RESIDENTE

Cav. Camillo Guerra

È certo costante economia della provvida natura formar degl' ingegni privilegiati sul comune degli uomini in ogni genere di virtù e di sapere per norma ed esempio altrui; ma essa lor non dà sempre l' utile consiglio di scevrar le opere da ogni errore nell' impeto delle loro creazioni. Ciò par che avvenga, affinchè l' umanità, mentre da un lato ammira questi straordinarî luminari, dall' altro non si sconfortasse nel doverli imitare o raggiungere; fatta certa, che quegli erano uomini e non Dei; e che chiamata ad imparare nelle opere di costoro il buono ed il perfetto, ha del pari l' obbligo di cansarne il cattivo. Queste idee a noi venivano in mente nel volgere il pensiero al dipinto del Giudizio, opera dell' immortal Buonarroti.

E poichè la ragione è la fiaccola, al cui solo lume dobbiamo fidarci nella ricerca del vero, così noi non at-

tingeremo dal prestigio, o dall'autorità, le idee ed i lumi per osservare questo capolavoro di Michelangelo, ma dalla sana filosofia e dai principî della stessa natura.

Però innanzi tutto non posso lasciar senza osservazione, per esser cosa tanto notevole quanto lamentabile, come un'opera così celebrata, una delle più vaste concezioni del genio delle arti, non abbia avuto in tre secoli e più una esatta e compiuta descrizione, da servirci di guida nel presente ragionamento.

In tale deficienza di autorevole dichiarazione di tanta dipintura dovremo da noi formarla; e perchè nell'esame del Giudizio del Buonarroti ogni osservazione non sembri avventata od ardita, ci faremo scorta delle stesse parole del suo più grande encomiatore, il Vasari: poichè par cosa non credibile che quello stesso Vasari, il quale, non bastandogli l'epiteto di divino aggiunto al nome di Michelangelo, volle affiancarlo con quello di divinissimo, nel descrivere questa straordinaria pittura, o per prevenire le obbiezioni che dalla parte della ragione gli potevano venir fatte, o perchè realmente a suoi tempi si bucciuassero alcune avvertenze che in prosieguo di tempo si son venute generalizzando, senza parlare nè del punto del soggetto scelto, nè dello scopo morale, nè della convenienza delle passioni e di tutte le parti armonizzate ad un fine unico e solo, si esprima così:

» Nè verrò a' particolari dell'invenzione o componi-
» mento di questa storia, perchè se ne è ritratte e stam-
» pate tante, e grandi e piccole, ch'e' non par necessa-
» rio perdersi tempo a discriverla (1). Basta che si vede

(1) Come se tutt'i lettori della sua storia avessero necessariamente conosciuto quell'opera, o le sue stampe.

» che l'invenzione di questo uomo singolare non à voluto
» entrare in dipingere altro che la perfetta, e proporzio-
» natissima composizione del corpo umano (1), e in diver-
» sissime attitudini: non sol questo, ma insieme gli effetti
» delle passioni e contentezze dell'animo (2), bastandogli
» satisfare in quella parte, nel che è stato superiore a
» tutt' i suoi artefici, e mostrare la via della gran ma-
» niera, e degl'ignudi, e quanto ei sappia nelle diffi-
» cultà del disegno; e finalmente à aperto la via alla fa-
» cilità di quest' arte nel principale suo intento, ch' è il
» corpo umano, e attendendo a questo fine solo, à la-
» sciato da parte le vaghezze de' colori, i capricci, e le
» nuove fantasie di certe minuzie e delicatezze, che da
» molti altri pittori non sono interamente, e forse non
» senza qualche ragione, state neglette ».

Riepilogato il senso di queste parole se ne raccoglie, che Michelangelo volle mostrarsi grande solamente nella somma intelligenza del corpo umano, e che apriva una nuova via all'arte per la gran maniera.

Del pari la discorsero il Lomazzo, il Filibien, e quanti ne scrissero dopo il Vasari, non escluso il giudiziosissimo Lanzi; ed il Condivi dice che Michelangelo à espresso tutto quello che d'un corpo umano può fare l'arte della Pittura, non lasciando indietro atto o moto alcuno. Ma è questo il modo di esaminare un'opera d'arte, quando devesi altrui insegnare? O non piuttosto far conveniva le seguenti domande? È unico obbligo dell'artista mostrarsi intelligentissimo solo del corpo umano? E poi non dico

(1) Vedete che non à voluto dipingere altro che il corpo umano.

(2) E qui quasi contraddicendosi, o almeno correggendosi, vi aggiunge come un soprappiù avere espresso gli effetti delle passioni.

*

lasciar da parte le vaghezze de' colori, i capricci, le nuove fantasie, ma non far conto del miglior punto nella scelta del soggetto, tradire la storia del sacro Testo, rappresentare nell' istesso quadro cose che succeder debbono in differente tempo? Riunire la favola e la santità della Fede? Esaminiamolo.

Abbiamo veduto e fermato, in altro ragionamento sulla Cena di Leonardo, esser primario scopo dell' artista, nell'argomento a trattare, la scelta del punto (1); e da questo dipendere il maggiore o minore effetto di un quadro. Michelangelo seppe ben dare nel segno; poichè, mentre niuno argomento esser potea più adatto all' indole altiera e all' indipendente animo suo, quanto la terribile scena del finale Giudizio, in questa il punto più terribile era certo quello, in cui il Giudice supremo i reprobi maledice; e questo egli scelse: lode dunque a Michelangelo nella scelta del punto.

Lo spirito del Buonarroti erasi quasi immedesimato con quello di Dante, del fiero Ghibellino, mediante la lettura del divino Poema, avendolo sempre seco, studiandolo e fattolo più prezioso con rare sue invenzioni, perchè più gli restassero in mente gli straordinarì concetti di quel Poeta creatore; e quindi non è a maravigliarsi se, nel concepire un sì vasto componimento, trasferisse tutta l' indole di quel sommo italiano, fino a mischiare al pari di lui il sacro col profano.

Imperocchè, come Clemente VII gli comandò di rappresentare nella Sistina due grandi istorie, cioè la ca-

(1) Gli artisti usano di questo vocabolo per determinare l' istante scelto a trattare nell' argomento dato.

duta degli Angeli sulla porta d' ingresso , ed il Giudizio universale sull' opposta faccia da servir di cona al maggiore altare di quella Cappella, Michelangelo in prima si accinse a far degli studi pel quadro del Giudizio; ma avvenuta la morte di Papa Clemente parvegli allora esser libero da quell' impegno, e poter attendere a dar fine alla prediletta opera sua, la sepoltura di Giulio II. Ma assunto al Pontificato il Farnese Paolo III. pria con carezze, poscia facendo uso della propria autorità, visitatolo con dodici Cardinali, costrinse l' artista a mettere in luce quegli studì, e ad eseguire la grande opera del Giudizio; e poichè egli colto avea il punto più spaventoso, più commovente, più ricco d' infinite passioni, a svolgerlo si accinse nello spazio assegnatogli.

Tutta quanta è larga e alta la vasta superficie della facciata dell'Altare, che comprende non meno di palmi 80 per pal. 44, raccolse il sovrano pensiere; se non che parve a Michelangelo modificarne il lato superiore formandone due archi, posando entrambi sopra una mensola sola, che viene a stare nel mezzo della parte superiore del quadro, quasichè dar ei volesse una idea di dittico, forma la più usitata a tempi suoi per una tavola di altare, e così far disparire quella forma rettangolare poco dicevole a cosa sacra.

In questa forma adunque divise Michelangelo tutto il suo componimento in due parti, una superiore ed una inferiore. In quella di sopra su gruppi di nuvole pose nel mezzo Cristo Giudice, in atto di emanare la fatale sentenza contro dei reprobi; gli si accascia dal destro lato la Vergine, che quasi compresa da rispettoso terrore si raccoglie presso del figlio, intorno al quale si affollano le schiere degli Apostoli, dei Martiri, e dei Beati tutti; che del

pari per la terribilità del momento quasi atterriti i segni del loro martirio ed i simboli delle loro dignità gli appresentano: e valgano per molti le due gigantesche figure, l'una di S. Pietro, che presenta le doppie e simboliche chiavi, l'altra di S. Bartolomeo scuojato, e che in mano tiene e mostra la propria cute; qui S. Caterina, che un gran pezzo di ruota dentata si affatica di alzare; ed altro Santo si accolla una immensa croce; là il Diacono Lorenzo si fa scudo allo sdegno Divino della infocata graticola; chi le frecce del sofferto martirio, chi il corpo per estrema penitenza e solitudine ispido e velluto al Giudice rappresenta.

A destra e a sinistra dei descritti gruppi veggonsi le altre moltitudini de' Beati, i quali si mostrano, siccome non ancora ascoltanti le terribili parole - *ite maledicti, ite in ignem aeternum* - o in fratellevole colloquio, o curiosi d'intendere ciò che si passa un poco più lontano da essi; altri in begli atti e cari abbracciamenti si riveggono con le loro parentele, e si consolano di un bene interminabile ed immenso, che quantunque diviso fra milioni di godenti è sempre lo stesso, perchè è Dio indivisibile, intero per ognuno. Da un canto e dall'altro sulle descritte compagnie de' Beati, e propriamente in quegli spazî compresi dai due succennati archi, gli emblemi della nostra Redenzione da molti Angeli in tutte le possibili attitudini vengono mostrati per conforto ai Beati, e per crucio ai dannati in quel solenne momento, come disse S. Tommaso: *veniente Domino ad judicium signum crucis, et alia passionis indicia demostrabuntur*: e prima di lui S. Matteo: *et tunc parebit signum filii hominis in caelo, et tunc plangent omnes tribus terrae.* Mat. 24. 30.

Nella parte media del quadro, quasi come nello spazio che divide il cielo dalla terra, sopra nubi assisi o volanti in quelle veggonsi diversi gruppi di figure ; a dritta gli eletti che s' innalzano verso Dio , o che da' loro beati congiunti vengono aiutati nel difficil cammino : tra' quali tu vedi chi è cinto di cilicio , segno della penitenza ; chi imbacuccato nel manto fa immagine de' cenobiti ; chi legato ai piedi e con le mani in atto di contemplazione, ti manifesta gli anacoreti; una madre col figliuoletto al seno è una sposa che aiuta il consorte a raggiungere Iddio : così tutti gli stati della vita trovano posto nel regno dei Cieli.

A sinistra sono infelici che piombano strascinati da' demonî al supplizio sempiterno ; e in diversi gruppi di tali disgraziati veggonsi espressi diversi vizî capitali ; ma in taluni di questi la convenienza non sarebbe del tutto contenta. Nel mezzo fra queste due schiere medie sono i sette Angeli dalle sette trombe ; e di questi chi gonfia le arrossite gote e spinge con tutta la forza il fiato nella sua tromba , chi eseguita la sua parte si pone lo strumento ad armacollo , e mira sulla terra lo spaventoso tumulto da esso eccitato. Altri due spiriti tengono in una mano un libro per ciascuno. Quello che sta alla dritta è picciolo e breve , perchè dei buoni è troppo scarso il numero ; grande e voluminoso è quello della sinistra , perchè *stultorum infinitus est numerus.*

Nell' estrema parte di basso , e più lontana , perchè le figure se ne impiccoliscono molto, stanno verso la dritta del quadro diversi e bellissimi gruppi di uomini , i quali dal seno della terra riprendendo le carni e le ossa , che un dì ebbero in vita , si sforzano di uscir da sotto alle glebe che li comprimevano , per comparire innanzi al di-

vino Giudice. E qui vedi chi non ancora del tutto composto mostra aver parte del suo corpo ancora scheletro; chi à la testa soltanto; chi a maraviglia si atteggia da simil portento percosso; chi impaurito guarda lo sdegno della giustizia divina; e diversi altri uomini infine sono tratti dagli Angeli e dalle branche di spietati Demonî, i quali con tutti gli sforzi si contrastano: ed è questo il modo con cui l'artista volle esprimere il fine del Purgatorio, il quale esister non deve oltre il finale giudizio: infatti la disputa di questi angeli con demonî è messa all'uscio di un'antro, in cui mentre da un lato ne escono quei benedetti purgati, vedesi l'interno di quello privo di anime, e ingombro solo di demonî in atto di disperazione e dolore.

La sinistra parte poi ed estrema del quadro componesi di quel famoso gruppo della barca di Caronte, capolavoro dell'arte per novità di pensieri, di attitudini e di espressioni di questi infelici dannati, e degli sforzi erculei degli spiriti infernali nello strascinarli fra la perduta gente. Così chiudesi questa terribile opera dell'arte, che sgomenterebbe una legione di pittori, e che eseguita fu in soli dieci anni da un solo.

Descritta in tal qual modo, il meglio che da noi si è potuto, non avendone incontrata altra migliore descrizione, la più grande, la più famigerata opera che vanti, come è detto, l'arte della pittura, o se ne guardi la estensione e l'argomento, o la fama in cui è salita, l'animo il più altiero è costretto a piegarsi innanzi a tanto capolavoro, e preso da profonda ammirazione esclamare, all'Italia solo di tali ingegni fa dono il Cielo.

E qui mi è d'uopo riprotestar di nuovo che nell'e-

saminare una tale opera non si muove da noi in cerca di falli; poichè questi cessano di esser tali o restano annientati dagl' infiniti pregi che l' adornano: ma da noi si vuol rilevare quello che non si accorda in tutto con una severa ragione, o colla esattezza della storia; onde simili parti possano cansarsi da quegli artisti che un simigliante argomento ànno a trattare, e le nostre riflessioni guidino gli scrittori non artisti a distinguere l' oro puro dall' orpello, sì nelle opere dei più grandi uomini, e sì in quelle degli ordinarî, senza lasciarsi abbacinare. Perciocchè dal non avere sceverato i passati scrittori le parti emendabili dalle parti sublimi, che adornano questa dipintura, si produsse la corruzione dell' arte, per mezzo dei volgari imitatori di sì grande uomo; i quali volendo quello che non potevano, imitarono i difetti di che erano capaci, e quel terribile disegno, che costituisce il grande di Michelangelo, sotto le loro mani divenne esagerato e ridicolo.

I.

Fatta con saggezza la scelta del punto dell' argomento, come si è detto, *che fu la maledizione dei reprobi*, vediamo come sia stato svolto e nelle parti e nel tutto; e se la composizione morale e materiale sia stata ragionata sì finamente come già ammirammo nella Cena di Leonardo.

Ed a far ciò è primo obbligo nostro aprire i sacri libri. In quel giorno dell' ira di Dio, *dies Domini*, miracolosamente verranno alla di lui presenza tutte le innumerevoli generazioni dei figliuoli di Adamo, ed assister dovranno a quest' ultimo rendiconto universale (1). Pren-

(1) Populi, populi in vallem concisionis, quia iusta est dies Domini. Joel. 3. 14.

deranno parte in questa tragedia immensa e solenne gli eletti ed i reprobi, i santi ed i dannati, Iddio ed i Demonî, perchè, al dir del Salmista, *Iddio vuol farsi conoscere per quel Dio che è — Cognoscetur Dominus iudicia faciens* (*psalm.* 9. 17). Ma come vi compariranno gli uni, e come gli altri? *Tunc iusti fulgebunt sicut sol* (Matth. 13. 49). I reprobi deformi e del color del peccato — *exibunt angeli et separabunt malos de medio iustorum* (Matth. 13. 43). A dritta i rigenerati nel sangue del Signore, a sinistra gli ostinati nella via del delitto.

Ma già l' empireo si apre: infinite schiere di Angeli fra un torrente di luce portano il legno della Croce, e gli altri strumenti del divino patire; ma in mezzo a tanta luce risplende in cima a tutti *quel segno rispettato in Paradiso* (1).

Sieguono ed assistono, come assessori a questo eterno e divino giudizio, i santi Apostoli e tutt' i confessori del Dio umanato, che insieme con Gesù Cristo giudicar debbono le genti=*fulgebunt iusti .... iudicabunt nationes* (Sap. 3. 7, 8). Verrà ancora ad assistere la Regina dei Santi, e degli Angeli Maria SS. Infine verrà l'Eterno Giudice in un trono di maestà e di luce, *et videbunt filium hominis venientem in nubibus caeli, cum virtute multa et maiestate* (Matth. 24. 30). La vista di Gesù Cristo consolerà gli eletti, ed a' reprobi ella apporterà più pena che lo stesso inferno (2). Ma ecco già comincia il giudizio « si aprono i libri delle umane opere (3) », e questi sono le coscienze di ciascuno,

(1) Veniente Domino ad iudicium signum crucis, et alia passionis indicia demonstrabuntur. S. Thom. opusc. 2. c. 144.

(2) Dicent autem montibus: cadite super nos; et abscondite nos a facie sedentis super thronum, et ab ira Agni. Ap. 6. 6.

(3) Iudicium sedit, et libri aperti sunt. Dan. 7. 10.

in cui Dio in un baleno (1) farà noto a tutti gli uomini i meriti e le colpe di tutt' i giudicabili: farà del pari comprendere la giustizia della divina sentenza: poscia Cristo rivolgendosi agli eletti dirà quelle parole consolantissime, *venite benedicti patris mei, possidete paratum vobis regnum a constitutione mundi* (Math. 25. 34). All' incontro a' dannati rivolgerà le spaventevoli sillabe = *Discedite a me maledicti in ignem aeternum* (Math. 25. 41). Ed è questo il punto scelto dal Buonarroti.

Vediamo ora come Michelangelo seppe, nello spazio assegnatogli, sviluppare la composizione materiale del suo soggetto. Egli in prima collocò nei due archi della parte superiore del quadro gruppi di Angeli portatori de' dolorosi emblemi della passione: più in basso nella parte eminente e nel mezzo del quadro pose Cristo sul trono con dappresso la Vergine, e caterve di Santi che la circondano; più in basso, e verso la metà del quadro, stanno gli Angeli delle sette trombe; a dritta di questi veggonsi le anime benedette che dalla terra volano al Cielo; a sinistra i dannati che diventano preda de' demoni: in basso quasi nel mezzo del detto dipinto vedesi il Purgatorio voto di anime; sulla dritta di questo le anime che riprendono gli antichi loro corpi, e sulla manca la barca di Caronte, che trasporta i perduti alle bolge d' inferno. Or questa composizione materiale di un tanto soggetto è così maravigliosa, così nuova, e contrapposta e variata in ciascun gruppo e in tutto il quadro, che stanca ogni immaginativa al solo guardarla; talchè se la parte morale della composizione, se la parte estetica, cioè di quella scienza sublime

(1) Unico intuitu singula peccata velut pictura monstrantur. S. Bas. lib. 5 de Ver. Virg.

di ogni arte d' imitazione che tanto distinse il massimo Leonardo, fosse stata unita a tale capolavoro, un' opera direbbesi perfettissima. Ma devesi al Buonarroti una tal lode? Vediamolo.

Ed in prima poichè scelto si era l' ultima scena del terribile giudizio, cioè allorchè Cristo Giudice condanna i reprobi, perchè far comparire le anime che debbono ancor prendere i loro corpi, ed altre che giunte ancor non sono innanzi al Giudice, mentre il Giudizio si chiude? È questo al certo un difetto contro l' unità d' azione. Ma si risponde: al tempo di Michelangelo questi errori non occupavano la critica universale. È ben vero: ma noi ci guardiamo dal commendarlo, e diciamo che per quanto questa libertà artistica meni ad arricchire e variare un soggetto qualunque, è sempre tuttavolta a scapito dell' azion principale e della perfezione di un' opera. Infatti, se invece di scegliere la maledizione dei dannati, tolto si fosse il momento in cui il Giudice Eterno apparisce, tutto allora sarebbe in armonia. Dunque è certo che vi è un controsenso: perchè una cosa che conviene con un punto di storia non può ugualmente servire ad un punto diverso: i punti nello spazio del pari che nel tempo si succedono, ma sono uno diverso dall' altro, e quando si confondono si forma l' anacronismo: parte certo non lodevole in qualunque opera d' ingegno.

Ma vi è un' osservazione di cosa molto più essenziale, che non potrebbesi, a parer nostro, in verun modo giustificare, ed è questa. Tutta la rappresentazione del giudizio, veduta nella parte estetica, si compone di due grandi passioni, quella del gaudio e quella del dolore. E queste due passioni in natura hanno opposti modi di ma-

nifestarsi : il godere dell' anima accoppiato alla certa idea della perpetuità di esso non può avere nella esterna espressione che moti tranquilli e calmi , il dolore all' opposto, che si accoppia con la disperazione, non à che moti violenti , esagerati , e straordinarî. Or questa duplice distinzione di atti e di sentimenti non trovasi per disavventura abbastanza pronunziata nel quadro in parola : perciocchè se dai movimenti e dallo stare delle figure che lo compongono tu volessi riconoscere quali siano i beati, e quali i reprobi, a stento distinguer li potresti ; tanto la foga di quell' anima impetuosa in variar gli atti e i modi in quell' immenso lavoro feccgli tradire questa parte essenziale dell' arte, per eccesso di espressione.

Infatti i nostri padri della pittura prima di Michelangelo, che non conobbero le seduzioni degli scorci, dei controposti, e le arditezze del disegno , ma che parlarono prima di tutto al cuore ed alla mente , massime nei sacri componimenti , quando ci dipinsero la sede de' beati , o quando i misteri di Cristo vollero farci vedere , anche a rischio di ripetersi , di copiarsi , non seppero altro inventare per esprimerci il godere di quei celesti abitatori, ed usarono collocarli su sferici gruppi di nuvole con in mezzo la Triade, e tutti a sedere , tranquilli e posati; onde ciascuno da quelle attitudini esterne ravvisasse quale esser dovea la calma che nell'anima racchiudono: principio dal quale fin lo stesso Raffaello nella disputa del Sacramento non seppe discostarsi , allorchè il Paradiso ci espresse.

Ma il Buonarroti , intollerante per natura di ogni spirito d' imitazione , e preso dalla vanità di dimostrare tutta la sapienza anatomica del corpo umano , cercò non solo negli atti dei beati , ma benanco nell' istessa figura del

Redentore, tali movimenti atletici ed esagerati, da sconvenire per tutt' i modi a quei santi personaggi: e tutto ciò a danno dello scopo morale e della estetica dell' arte, la quale, se vien privata dello scopo nobile di moralizzare gli uomini, si materializza, e perde il sublime posto a cui il Cielo l'ha chiamata.

Infatti era dovere dell'artista far conoscere nelle attitudini dei beati comprensori la sicurezza del loro godimento; perchè la nostra Religione c' insegna che una volta ottenuto il premio del Paradiso, che è Dio stesso, non può esserci tolto giammai. Ma egli, preso da soverchio desiderio di dar movimento e nuovo ed ardito ad ogni sua figura, à fatto che gli stessi Santi assessori al finale giudizio sembrino esser presi da tale eccessivo terrore che vanno mostrando i simboli del loro martirio all' istesso Giudice quasi ad indicare i mezzi della beatitudine eterna. Il che è ancora contro la fede; giacchè, avendo Cristo promesso ai suoi Apostoli dodici sedie nel giudizio universale per giudicare gli uomini, possono aver quelli le passioni dei giudicabili?

Queste ed altre avvertenze non osservate dall'artista han fatto dire al satirico Rosa, e ad altri meno riverenti del gran Michelangelo, che questi invece di un figliuolo di Dio fatto avea un gladiatore etc.

Or qui mi arresto un' istante, e domando a me stesso: Michelangelo, il gran Michelangelo avea di già dipinta la soffitta dell' istessa Cappella prima del Giudizio, ed in quella trattato avea il soggetto del Dio Creatore, dei veggenti dell' antica Legge; ed avea tanta maestà e grandezza messa nel volto dell' istesso Dio sì quando chiama dal nulla le cose, sì quando fra queste colloca il primo nostro pa-

dre, e sì quando scaccia minaccioso dal giardino delle terrestri delizie gl' infelici e prevaricati nostri progenitori ; e tanta profonda saviezza avea figurata nelle forme arcane di quei profeti, che tu certo li credi partecipi della Divinità ; in modo che in quelle figure insino ai giorni nostri Michelangelo non fu mai, non solo superato, ma neanche emulato : come poi nel dover esprimere Cristo Giudice non à seguito l' istesso sentiero, che pure egli avea tracciato nell' esprimere la grandezza di Dio, e gli uomini da questo ispirati? Poichè una è la Divinità, ed essa opera ugualmente le piccole come le massime cose, gli atti di amore il più tenero come quelli della più severa giustizia ; ma senza alterarsi, senza esternar forza alcuna ; essendo in lui il volere onnipotente che esegue invisibile all' occhio umano, e non la sua persona : e quando Cristo, che è sempre Dio, entra in un sacro argomento, non deve agire che come Dio (1).

(1) S' intende però sotto le attitudini umane e quasi ispirate dalle stesse passioni dell' uomo, massime nel nostro argomento in cui esprimersi dovea l' *ira Agni*, secondo lo scritturale linguaggio; ma quest' ira dell' agnello esser deve espressa con la dignità la più sublime che immaginare si possa, da non confondersi con l' umano iracondo ; e sempre a traverso di quella maestà e potere di *Colui che non si muove ed è motore* (*) siccome è detto in Geremia *Thr.* 1. 12. *Quoniam vindemiavit me, ut locutus est Dominus in die irae furoris sui.*

Non s' intende con ciò che Michelangelo atteggiato avesse il suo Cristo come Leonardo nell' ultima Cena ; ma lo sdegno di Cristo Giudice fosse espresso senza quel moto eccessivo e gladiatorio. Infatti se non basta a definire, come è detto, il modo, in cui muover devesi la divinità, operato dallo stesso Michelangelo nei principali fatti della Genesi nella volta della Sistina; riporteremo quello che nel giudizio universale dipinto a fresco dall' Orgagna

(*) Sonetto scritto a piedi di una figura gigantesca dell' Eterno Padre che abbraccia il mondo, opera a fresco di Pietro da Orvieto nel Camposanto di Pisa.

Lo stesso politeismo, che personificò le sue Divinità, non ebbe mai ricorso a movimenti esagerati ad esprimere o la loro forza, o il loro sdegno. Quantunque la Teogonia scritta desse non solo alle sue Divinità le umane passioni, e di queste anche le più brutte; pure l'arte mirando a fine più alto, a voler rappresentare gli Dei scevri di umane passioni come dai più illuminati filosofi pensavasi, fè che Giove Olimpico assiso sul trono alza appena la destra che sostiene lo scettro in segno della sua onnipotenza e della sua giustizia, senza aver bisogno che di un batter di palpebra per sconvolgere tutto il creato. L'Apollo che saetta il Pitone non riunisce il suo sdegno che nello sguardo, e nello sporger del labbro inferiore, e nell'elevazioni delle narici, essendo certo sconvenevoli a divinità tutti quei moti che indicano esternazione di forza materiale. E nella nostra sacrosanta Religione i grandi miracoli della Provvidenza sì nel regno della creazione, come in quello della conservazione, operati sono o dal suo volere invisibile, o visibilmente dagli Angeli o dagli elementi dell'istessa natura suoi principali ministri: e tal verità Cristo ripeteva a Pietro nell'orto, allorchè quegli ferir volea il servo del Pontefice. « Che se io volessi, mancherebbero a

nel Camposanto di Pisa vedesi espresso. Stà Cristo in atto ugualmente di maledire ed alza la destra a tal fine, volgendo sdegnato la testa ai dannati; con la sinistra scuopre l'aperto costato, ed il resto della persona è posato e tranquillo. Ah! quanto dicesi in simil atto! Non v'è chi nol ravvisi. Sopra altro trono simile al figlio la Vergine rammaricata guarda questo con la destra abbandonata sopra un ginocchio con la sinistra al petto, quasi deplorasse essere stato il patire di un Dio sì poco proficuo per l'intera umanità; a destra e a sinistra i dodici Apostoli sedenti su nubi e tranquilli assistono al fatale Giudizio. E bastino questi pochi personaggi per significare e dichiarare meglio la nostra idea.

mio padre dieci legioni di Angeli per distruggere armi ed armati ? »

Or se il Cristo di Michelangelo in questa scena atteggiato non è in modo degno della sua maestà, qual ne fu la cagione? La scienza profonda del corpo umano erasi talmente in lui immedesimata, che per far pompa di questa egli tradiva i principî più sacri, che hanno tutte le arti d' imitazione, e che fissi stanno nella natura e nella ragione. Talchè quel grande strascinato da questa foga non solo tradì il calmo e quieto atteggiare che assieme con Cristo aver doveano le schiere de' beati; ma li denudò tutti a scapito solenne della verecondia e santa riverenza del Tempio di Dio. E qui, se mi si oppone che tali si vedranno un giorno nel Cielo, allora io dirò che in quell'epoca l' occhio dell' uomo sarà depurato dal fuoco della giustizia divina, e non sarà combattuto dal senso come al presente; quindi non sarà mai scusabile un' artista che un tale esempio seguisse.

S' inchinino però gli orgogliosi artisti innanzi a queste mende di Michelangelo, e veggano come la mente la più robusta che abbia avuta l' arte, per uno spirito di originalità e di ostinazione in voler sacrificare tutto al nudo, siasi strascinato a mancare a quella dignità sublime che investir dovea quanto è grande questo grandissimo e tremendo soggetto della nostra sacrosanta Religione. Perchè un quadro esprimente un simile argomento, che dovrebbe far tremare ogni spettatore, come ne tremava S. Girolamo alla sola meditazione, questo quadro non fa che destare ammirazione profonda nell' animo degli artisti, per la dottrina e scienza del nudo, della indescrivibile varietà degli atteggiamenti, scorci, grandiosità di stile e novità

di pensiero ; ma nulla o poco l' animo vi commove. Il filosofo poi e l' ecclesiastico qual più qual meno, vi rinvengono quello, che noi siamo andati osservando non ad altro oggetto che per fare avvertiti i seguaci dell' arte, e gli amatori di essa, come si analizzano le opere di quella, e come non bisogna seguire i grandi uomini se non in ciò in cui essi sono stati veramente grandi.

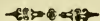
Sicchè noi chiuderemo il nostro breve ragionamento col dire : se tu vuoi imparare dal quadro del Giudizio la convenienza, la precisione istorica, la fina espressione, l' unità del componimento, mal ti avviseresti ; la Cena di Leonardo ti deve ciò insegnare. Ma se tu cerchi la grandiosità dello stile fino al terribile, l'immaginoso, lo sviluppo del corpo umano di ogni specie di scorcio, la ondolazione e mollezza dei contorni, il tutto improntato da uno spirito di novità, statti innanzi al Giudizio ; ed esso, ancorchè fossi un ghiaccio, ti desterà in petto qualche scintilla per uscir dal mediocre. Ma bada a non farti sedurre dal prestigio di questa opera ; sicchè inebriato da tanto valore, da sì grande rinomanza assai ben meritata, la voce della ragione non ti arrivi troppo tardi all' orecchio.

INTORNO
ALLA VITA ED ALLA STORIA DELLA FILOSOFIA
DI
GIOVAN BATTISTA CAPASSO

MEMORIA

letta all'Accademia nella tornata de' 29 Gennajo 1854

DAL SOCIO RESIDENTE

Paolo Emilio Tulelli

I.

Ci ha nella vita delle nazioni un periodo di tempo direi quasi oscuro ed inoperoso, nel quale l' attività produttrice della mente invece di spandersi e di operare al di fuori, si concentra all' opposto in sè medesima; ed in tale stato acquistando nuova energia e forza maggiore, feconda così quegli eterni semi del vero in essa riposti, che poi svolti ordinatamente e ad unità condotti, costituiscono il mondo ideale della scienza. La quale fatta adulta e matura, riempiendo di sè lo spirito di un popolo, purchè condizioni esteriori non la impediscano, prorompe al di fuori e si manifesta nelle stupende opere di ogni maniera di arti onde si allieta e si giova il viver civile degli uomini. In ciò la natura umana non si mostra dissimile dalla

natura vegetativa ; la quale nel giro della stagione invernale nelle radici e nel tronco concentra ed accumula le forze ed i succhi vitali, e poi nell' aprile li spiega nella pompa della esteriore vegetazione.

Non altrimenti sembra essere intervenuto fra noi durante il governo Viceregnale, quando per la straniera dominazione si andò degradando e spegnendo il lume della nostra patria civiltà, e con essa venner meno le scienze, le industrie, le arti, i commerci e la prosperità nazionale. Ricademmo per così dire in una seconda semibarbarie. Ma come avviene, che nella vita della natura, quando pare ch' ella dorma, allora più che mai internamente opera e si affatica ; nella stessa guisa l' attività intelligente dello spirito, se allo esterno non può svolgersi e manifestarsi in opere di sociale utilità, essa tutta in sè si concentra e si afforza, ed in sè medesima si va creando un mondo ideale di altissime speculazioni, dove, nello sconforto della vita reale, trova di che satisfare gl' indefiniti bisogni dell' umana natura, aspettando di tradurli in atto quandocchessia nel campo della vita esteriore. Onde è che noi vediamo, che a certi tempi poco men che barbari relativamente ad opere di esteriore civiltà, sorgono più che mai uomini per forza ed acume d' ingegno maravigliosi, i quali precorrendo al loro secolo, schiudono e sospingono l' umana intelligenza per ardui e non ancora tentati sentieri della scienza e dell' arte.

Ora questo tempo d' intimo lavoro della intelligenza in opere di nuove ed altissime speculazioni della scienza, se non andiamo in errore, ci pare essere stato per il nostro paese la prima metà del secolo decorso. In fatti leggendo in quel periodo di nostra storia (perciocchè voglia-

mo tacere di un Giordano Bruno, di un Bernardino Telesio, di un Tommaso Campanella, di un Antonio Serra, uomini per ardimento d'ingegno speculativo singolarissimi (1) appartenendo essi al secolo anteriore) c'incontriamo, fra gli altri, con un Gianvincenzo Gravina primo scrittore di filosofia del diritto (2); con un Pietro Giannone (3) inventore di un nuovo genere di Storia, la storia civile de' popoli; con un Mattia Doria (4) scrittore egregio di civile filosofia; con un Tommaso Rossi (5) me-

(1) A scanso di ogni sinistra interpretazione, crediamo avvertire, che riconoscendo noi negli scrittori sopradetti e negli altri nominati in seguito, eccellenza d'ingegno speculativo e molte verità da loro primamente investigate o messe in più chiara luce; non intendiamo però approvare gli errori manifesti in cui sono per avventura caduti, nè accogliere quelle loro opinioni che la scienza più progredita ha giudicato inappellabilmente false ed insostenibili.

(2) Il Gravina nacque in Roggiano nella Calabria Citra il 1664; pubblicò la sua celebre opera *de Origine Iuris* nel 1701, morì nel 1718.

(3) Pietro Giannone nacque in Ischitella in provincia di Capitanata nel 1676; pubblicò la sua Storia Civile del Regno di Napoli nel 1723; morì nel 1744.

(4) Paolo Mattia Doria de' Principi di Angri nacque in Napoli nel 1661; morì nell'anno 1745. Tra le molte opere di lui, le più pregiate sono: *Della vita Civile*; *Dell' Educazione del Principe*; e l'altra *Il Capitano Filosofo*.

(5) Tommaso Rossi Abate della Chiesa Collegiata di San Giorgio della Montagna, nella provincia di Principato Ultra. Non sappiamo nè la data precisa della nascita nè quella della morte di lui. È certo però che la sua morte ha dovuto avvenire dopo del 1743, nel quale anno egli pubblicò una sua opera della quale più sotto faremo cenno. Questo insigne filosofo è ignoto all'universale, e fino a poco tempo addietro ne sapevamo solo il nome, e la stima che di lui avea concepito il Vico, come raccogliamo da una lettera di costui al Rossi scritta nel 7 maggio 1753, nella quale l'autor della Scienza nuova chiama maravigliosa la disputazione del Rossi sopra l'animo umano. E noi dobbiamo la fortuna di avere avuto fra mano alcune

tafisico profondo ed eloquente da chiamarsi meritamente il Platone d' Italia ; e da ultimo, per esser brevi, c' incontriamo con un' Antonio Genovesi (1), e con un Giambattista Vico (2) il cui solo nome basta a render superba di sè, non che una gente, ma eziandio tutto il genere umano. Ma quel che quasi generalmente s' ignora, si è, che alla prima metà del secolo passato, visse in Napoli un filosofo, per quanto modesto ed oscuro altrettanto dotto e profondo, il quale concepì e prima di ogni altro scrisse e divulgò per le stampe una storia universale della filosofia.

Certamente io non dovrò innanzi a voi, Egregi Ac-

opere del Rossi, e di averle attesamente studiate, all' egregio dottor fisico Angiolo Beatrice, uomo versato in ogni maniera di gentili studî e nostro intimo e carissimo amico. Il quale, investigatore e raccoglitore indefesso delle opere degli scrittori della natia provincia, (delle quali egli ha già raccolto un gran numero, e che intende d' illustrare in un suo lavoro che avrà per titolo *Biblioteca Irpina*) ha rinvenuto tre opere filosofiche di Tommaso Rossi. Queste sono 1. *Considerazioni di alcuni misteri divini raccolte in tre Dialoghi*. Vol. in 4.° Benevento 1724. 2. *Dell' Animo dell' Uomo, disputazione unica*. Vol. in 4.° con la data falsa di Venezia 1736 3. *Della Mente Sovrana del mondo, disputazione unica*. Vol. in 4.° Napoli 1743. Dalla lettura di queste tre opere abbiamo ricavato aver il Rossi pubblicati altri lavori, quali sarebbero un *Apparato metafisico*, *Le Dispute Legali*, una Dissertazione latina *sul moto* ec. ec. e che noi non abbiamo potuto finora rinvenire.

In queste Opere il Rossi mostra di essere un tale pensatore da stare a fronte del Vico per l' originalità e profondità della speculazione, e molto a lui superiore per la chiarezza e l' ordine del dire. I quali ultimi pregi rilucono specialmente ne' Dialoghi sopra i divini misteri, leggendo i quali ci pare di avere fra mani un secondo Platone. E già volgiamo nell' animo l' idea di far noto agli amatori della patria filosofia, in apposito discorso, la vita e il valore scientifico delle opere di questo insigne scrittore.

(1) Antonio Genovesi di Castiglione in Principato Citra, nacque nel 1712, morì nel 1769. Le opere di lui sono note all' universale.

(2) Giambattista Vico nacque in Napoli nel 1668; pubblicò la prima edizione della Scienza nuova nel 1725; morì nel 1744.

cademici, patrocinare la causa della filosofia, nè discorrervi della eccellenza, della dignità, e della importanza della medesima; la quale, e Voi che siete savì senza dubbio alcuno ne converrete, tanto soprastà a tutte le altre umane scienze e discipline, per quanto lo spirito alla materia, la ragione al senso è superiore; e per dirlo brevemente per quanto l' ordine fisico sottostà all' ordine intelligibile e morale del mondo. Quello però che io credo dover notare si è, che di una scienza in generale, e della filosofia in particolare, niuno potrà mai formarsi un adequata idea, determinarne con esattezza l' obbietto l' estensione ed i limiti, porre e risolvere i problemi tutti che essa racchiude, se di essa scienza primamente non si scoprano l' origine e i principî, non se ne segua per la successione de' tempi e de' luoghi il progressivo incremento, e se da ultimo la mente non ne comprenda la sua finale evoluzione. Perciocchè solamente a questo modo potrà il filosofo formarsi della scienza sua un compiuto concetto, ed abbracciarne tutta la comprensione; solo a questo modo potrà elevarsi al vero concepimento della natura e del fine della filosofia; e da questa altezza scorgendo dove nel fatto ella è pervenuta, e vedendo ciò che le manca, potrà quindi sospingerla a quell' ideale perfezionamento del quale umanamente è capace. Laonde egli è manifesto, che alla vera e profonda concezione della natura e della ampiezza della scienza filosofica non solo utile ed opportuna, ma bensì necessaria è la sua storia.

La quale necessità della storia della filosofia da un' altra gravissima ragione deriva. Imperocchè se l' umana mente è per legge intima di sua natura sospinta alla soluzione razionale del grande enigma dell' Essere, e della

vita universale del mondo, nel che propriamente l'obbietto della filosofia speculativa è riposto ; pure ella nelle sue investigazioni procede primamente a passi spontanei e irriflessi , sendo ancora non ben determinato per Lei l' obbietto delle sue ricerche. Laonde è costretta dapprima a divinare piuttosto che a porre in forma ricisa e chiarissima l' obbietto delle sue investigazioni. Ed infatti noi vediamo , che le grandi invenzioni e i grandi trovati della scienza e dell' arte hanno dovuto ordinariamente esser preceduti da minute , lunghe , e progressive speculazioni o esperimenti ; i quali raccolti ed ordinati insieme dalla storia , sono serviti come di primi elementi e materiali all' umano ingegno per ideare e far sorgere poi l' edifizio splendido della scienza o dell' arte. E se egli è avvenuto mai, che alcuni uomini singolari e quasi divini abbiano di per sè e senza lumi o tradizioni anteriori concepito o scoverto un principio luminoso e fecondo ; se nella loro mente , come a baleno , siasi affacciata una grande idea generatrice di altre innumerevoli idee ; pure è da dire che di questo principio o di questa idea eglino ne abbiano avuto piuttosto una intuizione oscura che una chiara intelligenza. Ed ancorchè da' primi inventori di un principio o di una idea madre se ne fosse dedotta una scienza , pure è da confessare essere stata questa scienza imperfetta ed iniziativa. Imperocchè una idea ed un principio hanno un contenuto infinito ; e solo dal concorso di più intelligenze si può attendere nella successione del tempo lo svolgimento delle verità secondarie contenute nell' infinità di quella idea prima o di quel primo principio.

Alle quali ragioni dedotte dall' intrinseca natura dei primi veri , altre se ne aggiungono di fatto ricavate dalla

osservazione dell' andamento progressivo dell' umano intelletto. Il quale se nell' individuo si sviluppa e s' ingagliardisce di età in età, e ciò che ha nella infanzia acquistato alla adolescenza lo trasmette, e questa alla età virile; lo stesso andamento appunto prosegue nell' uomo collettivo ch' è la umanità. Della quale come i momenti, ovvero l' età, d' infanzia, di adolescenza, e di virilità sono le generazioni, e i popoli diversi che si succedono; e come questi si trasmettono a vicenda le cognizioni acquistate; per tal modo avviene, che nella scienza l' umanità progredisca, e che in paragone delle passate più ne sappiano le generazioni avvenire. Laonde è manifesto, che l' obbietto della scienza andando nella mente degli uomini di tempo in tempo sempre più determinandosi e svolgendosi, essa mediante questo suo storico svolgimento sempre più si va perfezionando e compiendo. E questa sembra al certo essere la ragione principale per cui, a modo di esempio, la filosofia Platonica ed Aristotelica avanzò di molto la pitagorica e la eleatica; perciocchè gl' ingegni del filosofo di Crotona e di quello di Elea non furono certamente meno stupendi e divini degli ingegni del filosofo di Atene, e di quello di Stagira. Tuttavia questi due ultimi, per la legge di progressione continua dello spirito umano, e perchè redarono il patrimonio della scienza dei primi, seppero aggiugnervi ancora del proprio, e seppero approfondire ed allargare i confini della tradizionale filosofia. Ed è questa parimente la ragione onde in fatto di scienze i moderni superano gli antichi; ai quali niuno vorrà negare eccellenza d' ingegno e forte temperatura di animo e di volontà. E veramente non vi ha scienza od arte della quale gli antichi non avessero stabilito o alme-

no intraveduto i principî ; e ciò mostra il loro valore e forse la loro superiorità sopra i moderni ; perciocchè di maggior forza ed acume d' ingegno fa mestieri nello inventare e nello scoprire, che nel seguitare le orme altrui e nel condurre a perfezione. Se ciò non fosse vero, sarebbe certamente a stimarsi una follia quel consenso unanime del genere umano a voler tributare onori quasi divini ai primi scopritori del vero. Ma se da una parte è indubitabile, che la scienza col volger dei tempi in ampiezza ed in profondità progredisce e si aumenta ; non è meno certo dall' altra, che questo progresso e perfezionamento della scienza presente suppone la cognizione della scienza del passato, e suppone ancora il distinto concetto delle sue origini e del suo continuo sviluppo. Laonde è manifesto quanto alla compiuta cognizione della scienza filosofica sia necessaria quella del suo storico svolgimento.

Primo fra tutt' i moderni a rimaner convinto di questa verità, e primo a concepire e porre in atto un disegno di una Storia universale della filosofia fu certamente il Napolitano Giovan-Battista Capasso. Ora di questo nostro chiaro concittadino, e della sua istoria universale della filosofia troppo indegnamente dimenticata, voglio per poco intrattenervi, o Egregi Accademici ; ed io fo questo col doppio intento e di revindicare ad un nostro italiano scrittore la gloria di aver prima di ogni altro, non eccetto il Bruker istesso, concepita e pubblicata una storia universale della filosofia da' primordî della scienza fino a' tempi suoi ; e di far rivivere un nome caro alla scienza, richiamando alla memoria degli studiosi della patria filosofia un' opera, la quale, anche a questi nostri dì splendidissimi per tanti lavori profondi di storia filosofica, si lascia leggere certamente con non poco profitto e diletto.

II.

E primieramente dirò della vita del Capasso quelle poche notizie che ho potuto raccogliere dalle scarse memorie rimasteci di quel tempo, nel quale i letterati uomini pensavano più a fare opere egregie, che a tramandarne a' posteri le laudi e la ricordanza (8).

Nacque Giovanbattista Capasso in Grumo popoloso ed ameno borgo della Campania, non molto lungi dell' antica Atella, nel 1683 da Silvestro, e da Caterina Spena di Frattamaggiore, la quale nobile ed agiata famiglia Spena o de Spenis era originaria di Napoli, ove e propriamente nella Chiesa di S. Caterina a Formello, si vede ancora una sepoltura gentilizia di questa famiglia con iscrizione latina posta nel 1544 Silvestro Capasso non apparteneva a casato meno agiato e gentile, sicchè ebbe modo di educare i suoi figliuoli in ogni maniera di scienze e di nobili discipline. Tre furono costoro, e tutti e tre vennero in fama di uomini dottissimi, ciascuno nel genere degli studî a cui si addisse. Il primogenito fu Nicola Capasso celebre professore di Leggi civili nella Università di Napoli, ed autore rinomato di eccellenti versi nella lingua del Lazio, e nel dialetto napolitano. Il secondo ebbe nome Domenico, il quale entrato nella Compagnia di Gesù, coltivò a preferenza le scienze esatte, e divenne Matematico di Giovanni V. Re di Portogallo. Da ultimo il

(8) Le poche notizie da noi date intorno alla vita di Giovanbattista Capasso, le abbiamo tratte dalla Biografia, che di Nicola Capasso fratello maggiore di Giovanni, scrisse Gregorio de Muellis.

*

terzo figliuolo fu il nostro Giovanni autore della Storia universale della filosofia, della quale ora teniamo discorso. Ridottisi costoro in Napoli sotto la direzione vigilante ed amorosa di un loro zio per nome Francesco Capasso, dotto e pio ecclesiastico, il quale avea l'onorevole uffizio di Rettore della Chiesa di S. Maria delle anime del Purgatorio, ebbero il destro di avviarsi fin dalla prima giovinezza pel retto sentiero delle scienze e delle buone lettere, avendo a maestri i più rinomati professori della Capitale. Vuolsi però che il nostro Giovanni avesse avuto a maestro nelle lettere greche e latine Nicola suo fratello, divenuto peritissimo quanto altri mai in queste due discipline. Non sappiamo però da chi avesse egli apparato filosofia, dalla quale scienza doveva un giorno ripetere rinomanza presso alla posterità. Non ostante la sua speciale attitudine agli studi speculativi, volse però l' animo alle scienze mediche, studiandole sotto alla sapiente disciplina del suo concittadino Nicola Cirillo, onore e lume in quel tempo della medica Facoltà di Napoli. Ma divenuto il Capasso dottore in medicina, ed esercitando la sua nuova professione a vantaggio dell' umanità languente, non si rimase però dal proseguire i suoi diletti studì della filosofia; anzi tanto era l' amore che nutriva per essa, che volle aprire scuola privata d' insegnamento filosofico, acciò trasfondesse in altrui quell' amore che in sè sentiva per la sapienza. Fu allora che ad uso del suo insegnamento privato compose la sua *Synopsis historiae philosophiae* ec. Non sappiamo però per quanti anni egli durasse ad insegnare, ed in qual tempo, e per qual ragione di Napoli si tramutasse prima in Grumo sua terra natia, e poi in Frattamaggiore ove fermossi fino alla morte. Condottosi il Capasso a quella

stanza tranquilla, e menato moglie, passò i pacati giorni della rimanente sua vita nell'esercizio della professione medica, e nelle dolci cure della famiglia, e negli ozî beati delle lettere e della filosofia. Se non che sappiamo ch'egli quotidianamente si recava alla vicina Aversa ad istruir di greco i giovani di quel Seminario, vinto dalle preghiere di quel Vescovo Cardinal Innico Caracciolo, il quale non sapea trovare chi meglio del Capasso vedesse più a dentro nella lingua e nella letteratura incomparabile de' Greci.

Era il Capasso di piccola statura, e di debolissima complessione; sì che giovane ancora di anni circa il 1735 morì. Ebbe sei figliuoli, tre maschi e tre femmine. Dei primi l' ultimo, per un forte timore concepito a causa della dispersione di una poliza di banco, vivente il padre, in assai tenera età si smarrì, e non se ne seppe più nuova. Gli altri due, Giovanni e Francesco, furono dallo zio Nicola chiamati presso di sè in Napoli, ove vennero gentilmente educati; ma pure essi in fresca età si morirono. Non rimasero adunque del Capasso che le tre sue figliuole, le quali ereditando il patrimonio paterno non solo, ma ancora quello più pingue dello zio, furono nobilmente e riccamente collocate a marito. E si godettero pure esse una ricca pensione a vita, loro stata assegnata dalla splendida munificenza di Giovanni V. Re di Portogallo, al quale Sovrano il Capasso avea già dedicato la Storia Universale della filosofia. Della quale opera ora è tempo che io vi discorra, o Egregi Accademici, lasciando da parte le altre opere minori che di lui ci rimangono, non entrando queste ultime nel disegno propostoci in questo lavoro.

III.

Dalla breve prefazione alla sua *Synopsis historiae philosophiae* ricaviamo, come il Capasso venti anni innanzi alla pubblicazione della stessa, avvenuta nel 1728, e quindi dai venti ai trenta anni della età sua, attendesse in Napoli all' insegnamento privato della filosofia. E giudicando utile cosa anzi necessaria, son quasi sue parole, alla perfetta istituzione della scienza, il far seguire un cenno storico sopra l' origine e il progresso della filosofia, e sopra i sistemi de' più chiari filosofi; così egli si fece a svolgere quanti libri d' istoria filosofica vi avea nelle biblioteche pubbliche e private di Napoli, e soprattutto nella biblioteca *Vallettiana* in quel tempo rinomatissima, sperando di ritrovare una storia della filosofia per ogni verso compiuta e perfetta, la quale movendo dalle prime origini, e procedendo successivamente per tutte le scuole filosofiche delle nazioni fino a' tempi suoi, dimostrasse l' andamento progressivo della idea della scienza, e svolgesse tutti i sistemi de' filosofi. Ma vane, egli prosegue a dire, riuscirono le sue speranze; perciocchè alcuni storici poche cose delle origini della scienza accennavano; alcuni altri della filosofia delle antiche genti, o di qualcheduna di esse discorrevano; e per ultimo la più parte degli storici la sola filosofia de' Greci prolissamente esponevano. Nè potendo da' grandi dizionarii, o da' colloquii con gli uomini eruditi conoscere, essere stata da alcuno secondo l' anzidetto disegno trattata e svolta la storia dell' umano pensiero si fece egli allora a comporre l' opera sua, nella quale, secondo l' ordinamento detto innanzi, presentasse agli stu-

diosi della scienza un quadro compiuto dello svolgimento storico ed universale della filosofia. Ma non era giunto il Capasso alla metà del suo lavoro, che lo intermise per poco; perciocchè ebbe notizia che il dottissimo uomo Tommaso Stanley avea di già pubblicato una storia filosofica, la quale poteva essere stata concepita ed eseguita sul medesimo disegno. Poichè ebbe letta il nostro modesto scrittore l' opera dell' illustre britanno nella traduzione latina di Giovanni Clerico; e veduto che non una storia universale della filosofia, ma solo quella particolare de' Greci avea avuto in animo lo Stanley di comporre; così si pose egli nuovamente al lavoro, e nel tratto di cinque anni d' indefessi e lunghi studî, condusse la sua storia a compimento. Avverte intanto il Capasso, che mettendo a stampa la sua *Synopsis*, intende solo di offerire a' cultori della scienza un disegno e quasi una idea di una storia universale della filosofia, lasciando ad altri più di lui, e per istudî e per ingegno valorosi, di recarla a maggior perfezione.

Detto del tempo e della occasione per cui il nostro autore pose a stampa la sua storia della filosofia, sorge spontaneamente il desiderio di conoscere quali sieno stati i suoi principî, e qual concetto egli si avesse formato della scienza. E qui siam forzati di dire ingenuamente non poter noi satisfare pienamente a tale inchiesta, non avendo il Capasso lasciata opera, dove con fare netto e dommatico avesse fermata ed esposta la propria dottrina. Imperocchè dalla sua storia medesima, nella quale espone l'origine i progressi e le vicende di ogni filosofia, non si rilevano i proprî principî, avendo voluto seguire piuttosto le veci di semplice spositore delle opinioni altrui, che

quelle di spositore insieme e di critico. La quale riserva per quanto sia utile e forse necessaria alle ragioni della pura storia narratrice fedele de' fatti, altrettanto è puerile ed antilogica alle ragioni della interpretazione e della critica. Nondimeno nel libro 1.° capo 1.° facendosi egli ad enumerare e riportar le definizioni diverse, che i più celebri filosofi hanno dato della scienza loro, accostandosi egli a' pensamenti di Tullio, di Clemente Alessandrino, e di altri insigni pensatori, la vuol definita per *la scienza di tutte le cose dalle loro cagioni e ragioni, in quanto con il lume naturale della mente può l'uomo conoscerle.* E riferendo ancora la partizione, in cui gli stessi filosofi hanno diviso o distinto la contenenza dell'obbietto universale, sopra di che versa la scienza della ragione, egli abbraccia la partizione della filosofia in fisica, ossia della natura, in metafisica o delle cose intelligibili, ed in etica, la quale include ancor la politica. Dalla quale definizione e partizione della scienza da lui seguita, dal modo suo di esposizione delle sentenze e teoriche delle diverse scuole filosofiche, e più dal metodo adoperato generalmente a' tempi suoi, siamo indotti a credere aversi il Capasso formato un concetto obbiettivo ed ontologico della scienza filosofica, e quindi seguire le orme della grande scuola ontologica italiana fondata dapprima da Anselmo di Aosta, e rifermata da' suoi contemporanei ed amici e concittadini Tommaso Rossi, e Gianbattista Vico. E ciò è da notarsi nel Capasso, il quale nella sua storia si compiace di dare una esposizione compiuta della filosofia del Cartesio, filosofo il più rinomato a quei dì, e promotore principale del moderno psicologismo.

Ma qualunque sia stata la dottrina filosofica del Ca-

passo, è mestieri primamente dimostrare l'anteriorità della sua *Synopsis* ad ogni altra storia universale della filosofia, e poi far conoscere l'ordine col quale ha egli proceduto nella composizione dell'opera sua.

Come di sopra si è detto, era disegno del Capasso di offerire con la sua *Synopsis* alla mente de' giovani suoi discepoli un quadro compiuto dell'andamento dell'idea filosofica discorrente per tutte le nazioni e per tutti i tempi fino a' giorni suoi. Ora, per quanto noi sappiamo, niuna storia filosofica universale era comparsa nella repubblica delle lettere prima dell'opera del nostro napolitano filosofo. Sì che a lui si deve l'onore di aver prima di ogni altro concepito e prima di ogni altro mandato ad effetto il vasto disegno di una storia universale della filosofia, la quale presentasse il movimento universale e mirabilissimo del pensiero filosofico del genere umano. Imperocchè la grande storia della filosofia del Bruker distesa, benchè in più grandi e più ampie proporzioni, sul medesimo disegno, non vide la luce che nel 1741-44, ed accresciuta di poi di un quinto volume nel 1767. Laonde la storia del Capasso pubblicata in Napoli nel 1728 precede di tredici anni quella del filosofo tedesco. E pure il Bruker segue appunto nella sua opera l'ordine e l'andamento stesso seguito dal Capasso nella sua storia. E ciò abbiamo voluto indicare non perchè sia nostro giudizio avere il tedesco tratto dal napolitano storico l'idea del suo immenso lavoro; il che se fosse avvenuto, l'avrebbe al certo quel sommo scrittore dichiarato; ma l'abbiam fatto perchè si renda manifesta l'originalità del concetto e la priorità di esecuzione dell'opera del nostro patrio scrittore, soprattutto al cospetto di coloro i quali vanno tutto dì ripetendo

ed appellando il Brukero qual primo creatore e padre dell' istoria universale della filosofia.

L' opera del Capasso, scritta secondo il costume del tempo in elegante latino, è divisa in quattro libri. Nel primo, ch' egli intitola *della origine della filosofia e dei primi sapienti*, si fa a discorrere della definizione, della divisione, dell' origine e del fine della filosofia; segue a parlare degli inventori di essa scienza, o de' primi sapienti, incominciando dalle tradizioni filosofiche antidiluviane fino a Mosè e Salomone, e più diffusamente della dottrina propria di questi due ultimi sacri scrittori. Nel secondo libro detto *della filosofia de' Barbari*, da lui così chiamata in opposizione a quella de' Greci, discorre delle dottrine delle scuole filosofiche de' Caldei, de' Persiani, de' Sabei, degli Indiani, de' Cinesi, degli Egizî, degli Arabi, degli Ebrei, de' Fenicii, degli Etiopi, de' Libii, degli Sciti, de' Traci, e de' Galli. Il terzo libro comprende tutta la filosofia de' Greci dalla simbolica e mitica fino alla scuola eclettica Alessandrina, discorrendo di tutte le dottrine delle scuole, nelle quali si divise e si svolse quell' immenso e splendido periodo della scienza filosofica. E da ultimo il quarto libro, che l'autore intitola *de' Filosofi più recenti*, comprende primamente la filosofia de' Romani, discorrendo delle sette pitagoriche, accademiche, stoiche, epicuree, peripatetiche, le quali, vestendo abito latino, in Roma si riprodussero; indi espone la filosofia de' Padri, e discorre della filosofia scolastica in tutta l' ampiezza sua e per tempi e per luoghi; e da ultimo movendo dai filosofi dell' epoca del risorgimento delle lettere e delle scienze, espone la dottrina de' novissimi peripatetici, e antiperipatetici, degli accademici, ed epicurei, e de' novissimi

filosofi naturalisti fino a Gassendi e Cartesio, della dottrina del quale fa una compiuta e lucidissima esposizione. Chiude poi la sua *Synopsis* con un' appendice sopra i filosofi ommessi nel corpo dell' opera.

IV.

Questo è appunto, o Signori, il contenuto, e questo è l' ordine seguito dal Capasso nella esposizione della sua storia universale della filosofia. E primamente vogliam che si noti come il nostro autore, a capo della filosofia di ogni popolo ha cura di porre le credenze comuni tradizionali o scritte del medesimo, dalle quali come da'principî spontanei del sapere volgare del genere umano, muove la speculazione riflessiva e riposta de' filosofi. E ciò appunto spiega il perchè nella sua storia ci parla il nostro autore delle dottrine antidiluviane, abramitiche, orfiche, mitiche ec. ec.; le quali al certo non entrerebbero altrimenti in un'esposizione dello sviluppo razionale dell'umana intelligenza. Avvertiamo in secondo luogo avere egli seguito l' ordine cronologico, ed avere diviso l' epoche storiche del progresso della scienza filosofica in quattro grandi periodi, secondo il cammino della civiltà delle nazioni. Noi non vogliamo portare un giudizio severo sopra questa troppo generale e quindi indeterminata divisione dell' epoche filosofiche, classificazione fondata più sopra le condizioni contingenti ed estrinseche de' tempi e de' luoghi, che sopra quelle intrinseche e necessarie del movimento logicale della scienza. Tuttavia seguendo il nostro autore sì fatto ordine storico, ci è forza confessare come egli abbia piuttosto scritta la storia de' filosofi, anzi che quella della fi-

losofia. In fatti per quanto egli è parco nell' esporre le teoriche de' filosofi e nel darne lo sviluppo logico e razionale, altrettanto è largo e minuto nel raccogliere e riferire le notizie riguardanti la loro vita, e le opere loro. E in ciò veramente dimostra un' immensa e scelta erudizione, e una diligenza infinita; nè trascura di riferire i titoli delle opere di ciascun filosofo siano disperse, siano arrivate fino a noi. Ma in quello che spetta al fondo e quasi direi all'essenza delle dottrine e de'sistemi, in vano tu la cerchi significata e svolta nella sua storia; e delle opinioni, delle sentenze, e delle teoriche stesse, delle quali egli fa cenno, non cura egli indagare i principì, o mostrare le connessioni, nè svolgerne le conseguenze, nelle quali cose certamente è riposta la natura della teorica o del sistema. E pure questo è uno de' principali fini al quale deve intendere lo storico della filosofia.

L' altro fine non meno importante, anzi dirò meglio, l' altro ufficio cui deve attendere lo storico della scienza, e ch' è dal nostro autore interamente trasandato, si è quello di portar ragionato giudizio delle teoriche che si espongono, specialmente quando l' opera, come è quella del nostro scrittore, sia all' insegnamento de' giovani indirizzata. Ora a poter dare un giudizio critico delle teoriche e de'sistemi sì svariati e moltiplici, che la storia della filosofia ci presenta, è mestieri che lo scrittore si abbia non solo formulata in sua mente, ma fermata e svolta nella sua opera, una teorica propria e superiore; dall' altezza della quale possa dominare tutto il movimento dell' idea filosofica di ciascun sistema, scorgere di un tratto le conseguenze inchiuse nel loro principio, vederne le connessioni e le attinenze, e saperle poi ridurre all' unità superiore di quella

teorica, dalla quale solamente può discendere la giusta estimazione del sistema in disame. Perciocchè senza il lume di questa teorica superiore e giudicatrice, vano ed inutile e forse pericoloso alla mente de' giovani riuscir deve ogni lavoro storico della filosofia.

A fare adunque che le sue ricerche non tornino infruttuose, ed a giugnere più speditamente al suo scopo, ei pare che lo storico della filosofia, dopo di avere bene studiati e raccolti i fatti empirici ed *a posteriori* della scienza, quali sono le sentenze, le opinioni, la dottrina di un filosofo, e d' una scuola, e se vuolsi, di tutt' i filosofi e di tutte le scuole; deve poi nel loro ordinamento seguitare piuttosto l' ordine logico o ideale della scienza, che l' ordine cronologico ed empirico. E questo ordinamento ideale (secondo che a noi pare, e come in un lavoro speciale ci sembra d' avere fino alla evidenza dimostrato (1)) consisterebbe nel partire e muovere dal concetto primo e dalla idea madre dell' obbietto della scienza filosofica, e considerarne *a priori* i suoi possibili e logicali svolgimenti; e di questi ideali svolgimenti segnare e seguire accuratamente il processo rigoroso, e le leggi, e i principî, e l' estreme conseguenze. A questo modo si verrebbe a formare la storia ideale ed eterna della filosofia, o se meglio vuolsi dire, la teorica razionale de' sistemi possibili della scienza: con i quali sistemi appresi razionalmente nella loro necessaria e logicale esplicazione, potrà ciascuno cacciarsi franco e sicuro nel campo della storia e nel labirinto de' fatti filosofici, e delle infinite sen-

(1) Questo nostro lavoro, che abbiamo in animo di dare alla luce quanto prima, ha per titolo *Della Teorica razionale de' sistemi filosofici*.

tenze ed opinioni de' filosofi di tutte le scuole , senza timore alcuno di smarrirsi. Perciocchè la varietà prodigiosa , e spesso la contradizione medesima delle opinioni dei filosofi non porterebbe allora più confusione o maraviglia, avendosi innanzi il criterio a giudicarne il vero od il falso , e sapendosi ancora anteriormente da quali principî esse muovono ed a quali sistemi si riconducono.

Nè ci si voglia opporre, che consigliando noi sì fatto metodo ideale , pretendiamo di creare la storia della filosofia *a priori* ; siccome alcuni vorrebbero far credere esserci degli scrittori , i quali trascurando o rifiutando affatto gli avvenimenti e le vicende reali della vita delle nazioni , vogliono soltanto dalla natura e dalle leggi ideali dell' uomo ricavare *a priori* la storia del genere umano. Imperocchè a dimostrare pienamente quanto questa obbiezione sia affatto aliena al nostro proposito , risponderemo osservando , che i contradittori del metodo ideale non hanno voluto o non hanno saputo intendere il vero principio e la vera indole di questo ordine della scienza. Perciocchè s'ingannano a partito quando essi fanno mostra di credere , che i seguaci di questo metodo pretendano di creare la scienza , e quindi la storia della filosofia , senza che primamente si fosse atteso ad osservare, raccogliere, ordinare i fatti sensibili ed empirici della vita razionale dell' uomo e dell' umanità. Pretensione assurda non meno che ridicola , e non caduta mai in mente de' promotori sinceri del vero metodo ideale ; chè certamente è cosa evidente, e da ogni filosofo che abbia fior di senno ammessa indubitatamente , che l' intelligenza primitivamente incomincia dall' apprensione , immediata o mediata che sia, de'fatti sensibili ed empirici , rivelatori dell' esistenza e della vita

delle cose. In fatti lo spirito umano non è creatore, ma semplice spettatore nell' immenso teatro dell' universo; e se l' Essere, e le esistenze non vengano a lui manifestate, (e questa manifestazione in qualunque modo si faccia è sempre per lui un fatto empirico, che si rivela nel fondo lucidissimo della coscienza) non potrebbe certamente non solo comprenderle ed averne scienza, ma neppure concepirle o pensarle. Ora come mai la mente umana potrà nell' istituire la scienza di una esistenza, prescindere dalla realtà e dal fatto dell' esistenza medesima? Perocchè ogni rivelazione o manifestazione di esistenze, sia per via del senso o della coscienza, sia per apprensione o intuito razionale, è sempre un fatto empirico ed *a posteriori*. Ma se il fatto sensibile, o il fatto razionale è il primo momento da supporsi dato nella scienza, non è certamente esso fatto la scienza. Questa incomincia quando di siffatto essere reale, appreso dal senso o intuito dalla mente, la intelligenza concepisce e determina il principio, la essenza, le ragioni, le attinenze ed il fine. Sicchè se nella conoscenza ordinata de' principî, delle ragioni, delle attinenze e del fine di un essere consiste la scienza di esso; chi mai oserà di sostenere, che i principî le ragioni le attinenze ed i fini degli esseri sieno obbietto del senso e della coscienza, e che quindi empiricamente possa venire istituita la scienza? E la filosofia, ch'è appunto la scienza de' supremi principî, ragioni, e fini degli esseri, non si potrà mai istituire, se non vuolsi farla scadere dalla sua dignità e natura, con metodo diverso dall'ideale e *a priori*. Per quello poi che particolarmente concerne alla storia della filosofia, non dubitiamo di affermare, che se i fatti empirici i quali sono le opinioni e le teoriche de' filosofi

delle diverse scuole, e da' quali primamente dee partire lo storico, non si modellano per così dire e non si riducono a quella teorica ideale de' sistemi detta di sopra, e che sola può ordinarli sotto di sè, e sola potrà farli comprendere; lo studio di essa, soprattutto per l'insegnamento de' giovani, riuscirà certamente vano ed inintelligibile.

Se non che noi non vogliamo, che il peso di queste nostre critiche osservazioni cada interamente sopra il lavoro di Giovanbattista Capasso; il quale tanto per la condizione degli studî storici della filosofia a que' tempi, quanto perchè il primo a discendere in questo vasto aringo, non poteva elevarsi a tanta altezza della scienza, dove appena di presente, e pure molti lo contendono, osano credere di essere pervenuti i moderni. Ma quello che a lui meritamente si deve retribuire, sotto pena di essere ingiusti, si è di riconoscerlo qual primo scrittore d'istoria universale della filosofia, e di annoverare il suo nome tra i principali filosofi, che nel passato secolo contribuirono alla gloria ed all'incremento dell'italica filosofia.

INDICE

DEL VOLUME SESTO

INDICE

DEL PRESENTE FASCICOLO

Prezzo del presente fascicolo . . . . . gr. 90